ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

ОНТИ № 240. Индекс 60-6-4. Тираж 25.000 экз.
Редактор *Е. В. Пулькина*. Техн. редактор *Р. В. Эмдина*.
Сдано в набор 17/X 1934 г. Подписано к печати 21/III 1935 г.
Бумага печ. 82×110 1/32. Колич. печатн. знаков на 1 бум. л. 141.616.
Ленгорлит № 4255. Авт. л. 16 1/2 Бум. л. 4 5/8. Заказ № 3412.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана не столько для друзей математики, сколько для ее недругов. Она имеет в виду, главным образом, не тех, у кого есть склонность к математике, и не тех также, кто вовсе еще не приступал к ее изучению. Автор предназначает книгу всего более для той обширной категории читателей, которые знакомились в школе (или сейчас еще знакомятся) с этой наукой без особого интереса и одушевления, питая к ней в лучшем случае лишь холодную почтительность. Сделать геометрию для них привлекательной, внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению — прямая задача настоящей книги.

Лучшее средство для этого — показать предмет, до некоторой степени известный читателю, с новой, незнакомой, порою неожиданной стороны, способной возбудить интерес и привлечь внимание. С этой целью автор прежде всего отделяет геометрию от классной доски, с которой наука эта прочно срослась в представлении такого читателя, выводит ее из стен школьной комнаты на вольный воздух, в лес, поле, к реке, на дорогу, чтобы под открытым небом отдаться непринужденным геометрическим занятиям, без учебника и таблиц, без циркуля и линейки. Таково содержание первой части книги. Вторая предлагает читателю пестрый подбор упражнений и задач, любопытных по сюжету, неожиданных по результату, мало похожих на те, какими занимается школа. Здесь также учебник откладывается в сторону, а единственный книжный материал, к которому привлекается внимание читателя, — страницы Жюля Верна, Майн-Рида, Марка Твэна, Джонатана Свифта, Л. Н. Толстого...

Удалось ли подобными средствами достигнуть цели— пусть судят те недруги геометрии, которых автор желает превратить в ее друзей.

К сведущим читателям — просьба сообщить о замеченных в книге промахах и желательных изменениях. За прежде сделанные замечания выражаю моим корреспондентам глубокую благодарность.

Настоящее, пятое издание исправлено, дополнено и заново иллюстрировано.

Часть первая

ГЕОМЕТРИЯ НА ВОЛЬНОМ ВОЗДУХЕ

Первые основы геометрии должны быть заложены не в школьной комнате, а на вольном воздухе. Покажите мальчику, как измеряется площадь луга, обратите его внимание на высоту колокольни, на длину тени, отбрасываемой ею, на соответствующее положение солнца, — и он гораздо быстрее, правильнее и при том с бо́льшим интересом усвоит математические соотношения, чем когда понятия измерения угла, а то и какой-либо тригонометрической функции внедряются в его голову помощью слов и чертежа на доске

Альберт Эйнштейн

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

ПО ДЛИНЕ ТЕНИ

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения помощью весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ — без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес, — говорит предание, — избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени.[1] Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски-простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно, следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

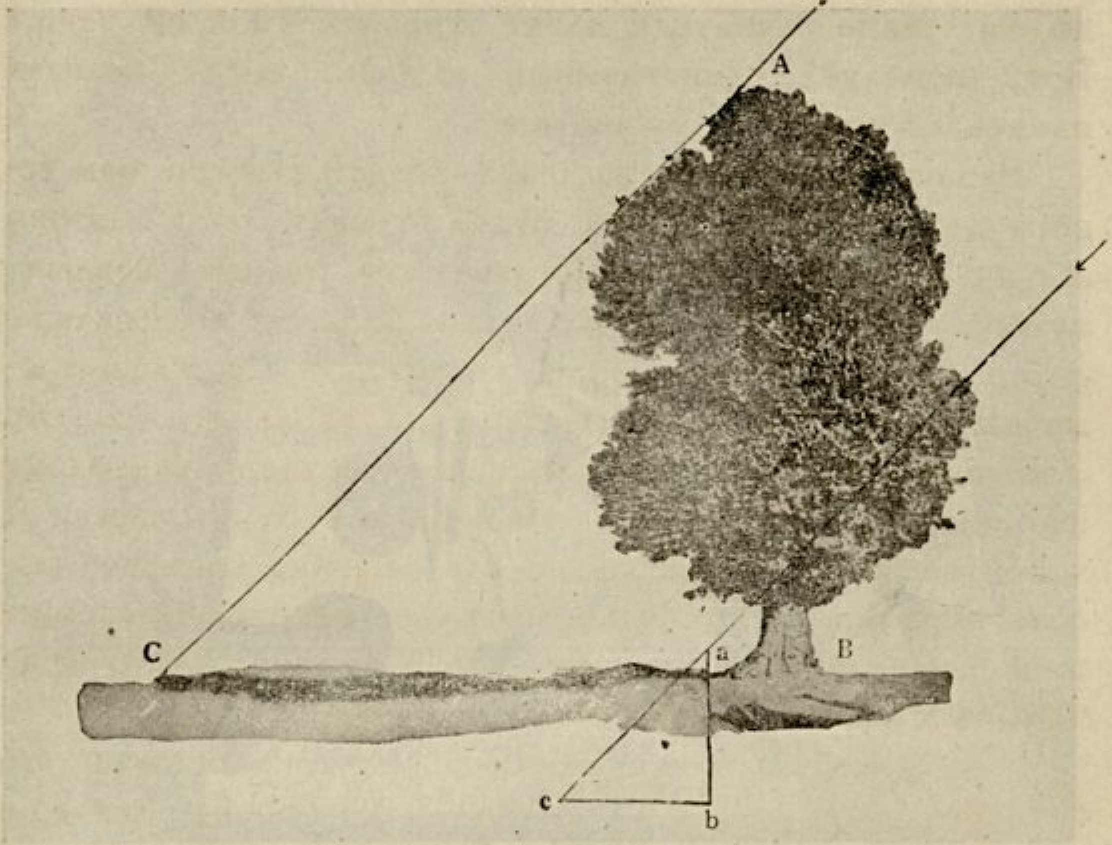
2) что сумма углов всякого треугольника (или, по крайней мере, прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием, Фалес в праве был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения

---

[1] Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

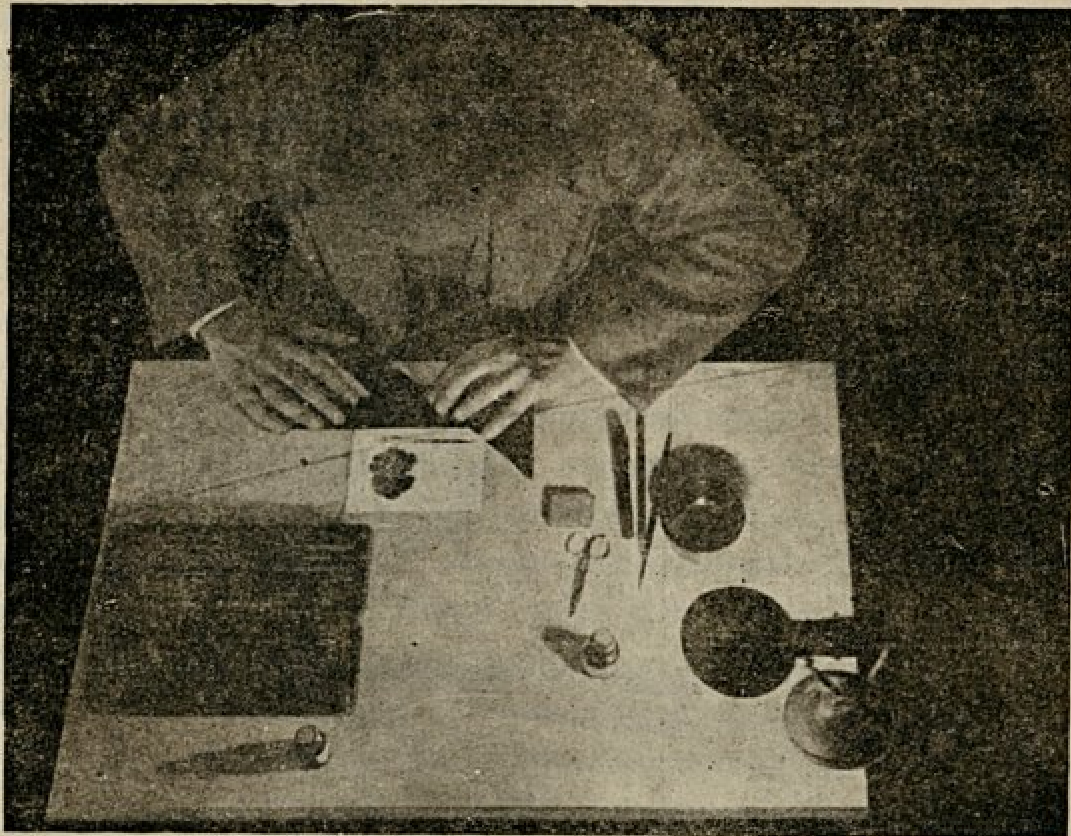


одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Не трудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (рис. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

т. е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз



2

тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников *ABC* и *abc* (по двум углам).

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете настольной лампы, — оно не оправдается. На рис. 2 вы видите, что длины теней от предметов на столе не пропорциональны их высотам. Здесь не имеет место подобие треугольников. Поэтому две одинаковые баночки туши отбрасывают тени заметно разной длины, а не одинаковой, как было бы в случае солнечных теней.

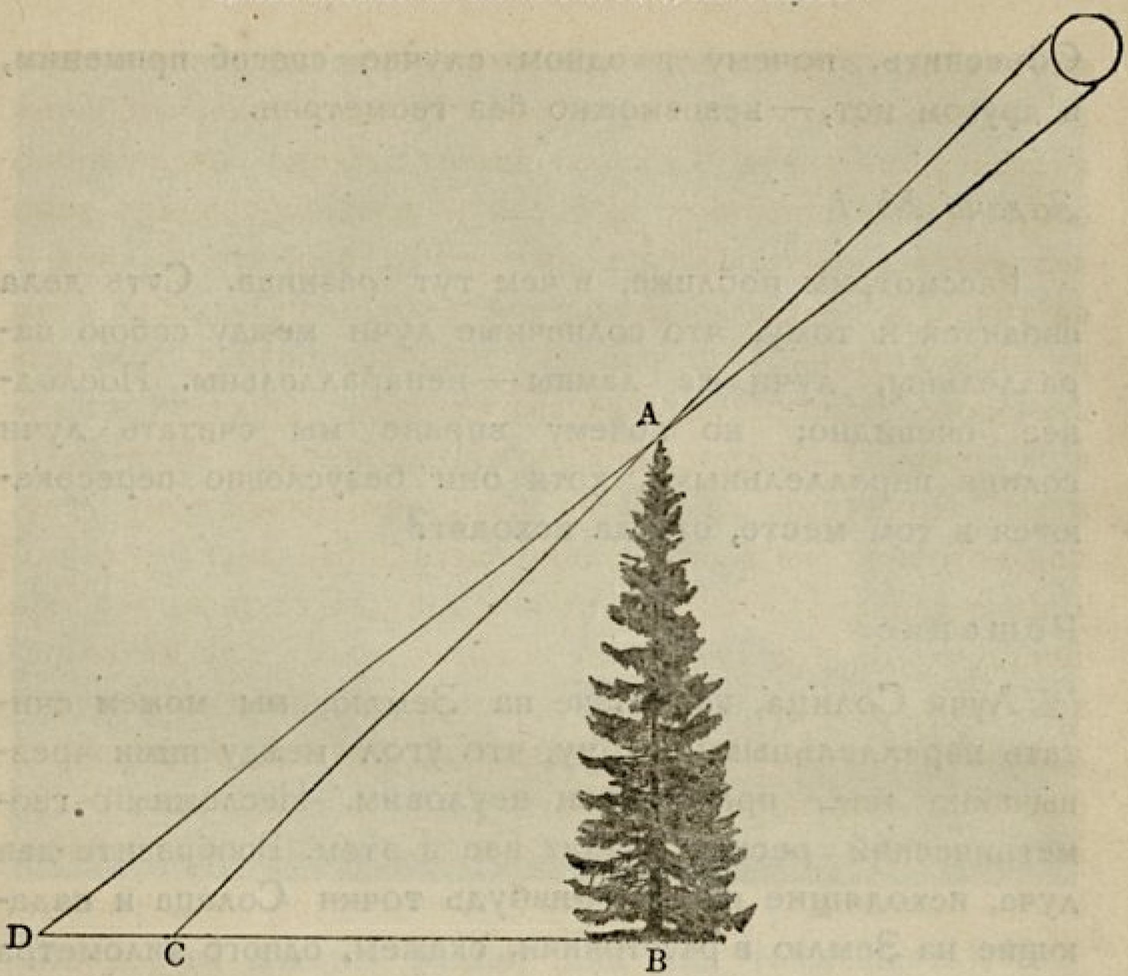
Объяснить, почему в одном случае способ применим, в другом нет, — невозможно без геометрии.

Задача № 1

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же лампы — непараллельны. Последнее очевидно; но почему вправе мы считать лучи солнца параллельными, хотя они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

Решение

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность на расстоянии Земли (т. е. радиусом в 150 000 000 *км*), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиною. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times 150\,000\,000$ *км* $= 940\,000\,000$ *км*. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т. е. около 2 600 000 *км*; одна дуговая минута — в 60 раз меньше градуса, т. е. равна 43 000 *км*, а одна дуговая секунда — еще в 60 раз меньше, 720 *км*. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 *км*; значит, она соответствует углу в $^1/_{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы



3

можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые.[1]

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

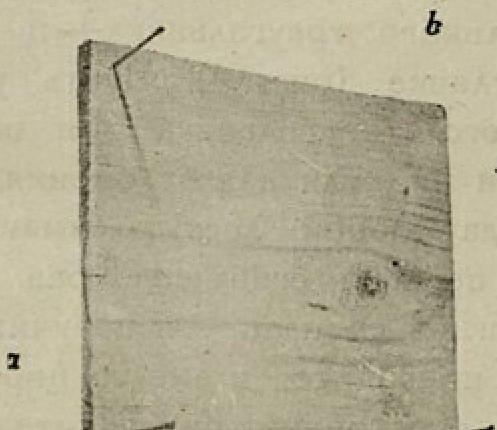
Пробуя применять способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, что нельзя получить помощью его вполне надежного результата. Тени не отгра-

[1] Другое дело — лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра: угол между ними достаточно велик для измерения (около 17″); определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.

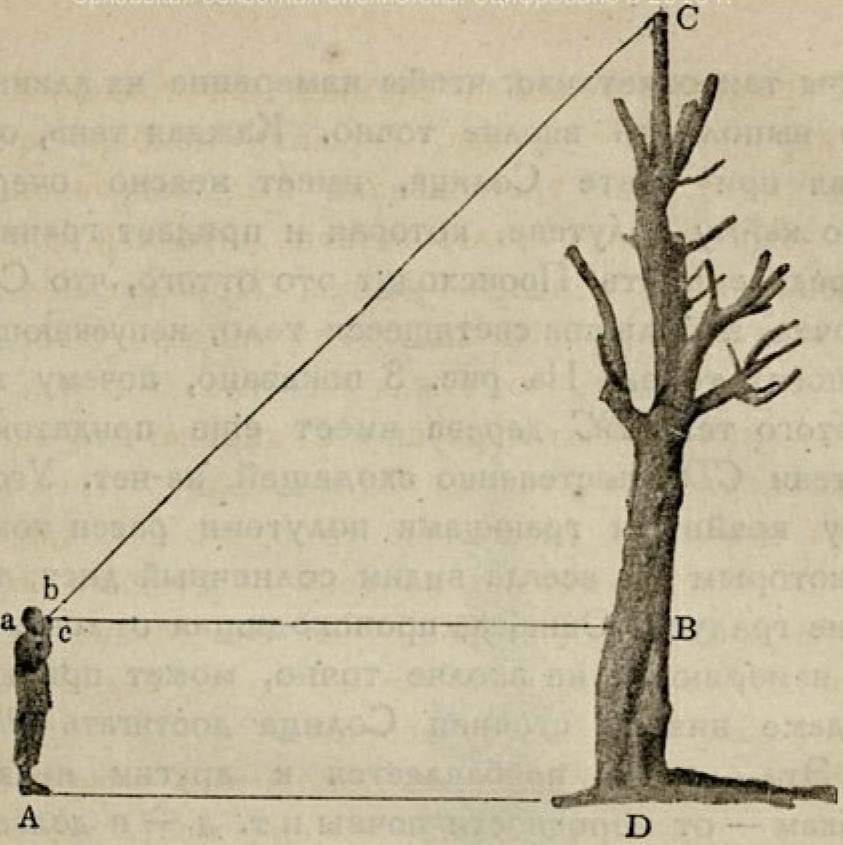
ничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце— не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени *CD*, постепенно сходящей на-нет. Угол *CAD* между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, т. е. половине градуса. Ошибка, происходящая от того, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком даже низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т. д. — и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

ЕЩЕ ДВА СПОСОБА

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.



4



5

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают 3 точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4). Пусть у вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла; нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния. Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место A (рис. 5), из которого, глядя на булавки a и b, увидите, что они покрывают верхушку C дерева: это значит, что продолжение гипотенузы ab проходит через точку C. Тогда, очевидно, расстояние aB равно CB, так как угол $a = 45°$. Следовательно, измерив расстояние aB (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние AD) и прибавив BD, т. е. возвышение aA глаза над землей, — получите искомую высоту дерева.

По другому способу вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступа-

6

ющая часть как раз равнялась вашему росту. Место для шеста надо выбрать так, чтобы лежа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник Abc— равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45°$, и следовательно, $AB = BC$, т. е. искомой высоте дерева.

ПО СПОСОБУ ЖЮЛЯ ВЕРНА

Следующий, тоже весьма несложный способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюля Верна в известном романе „Таинственный остров".

„—Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида,— сказал инженер.

„—Вам понадобится для этого инструмент?—спросил Герберт.

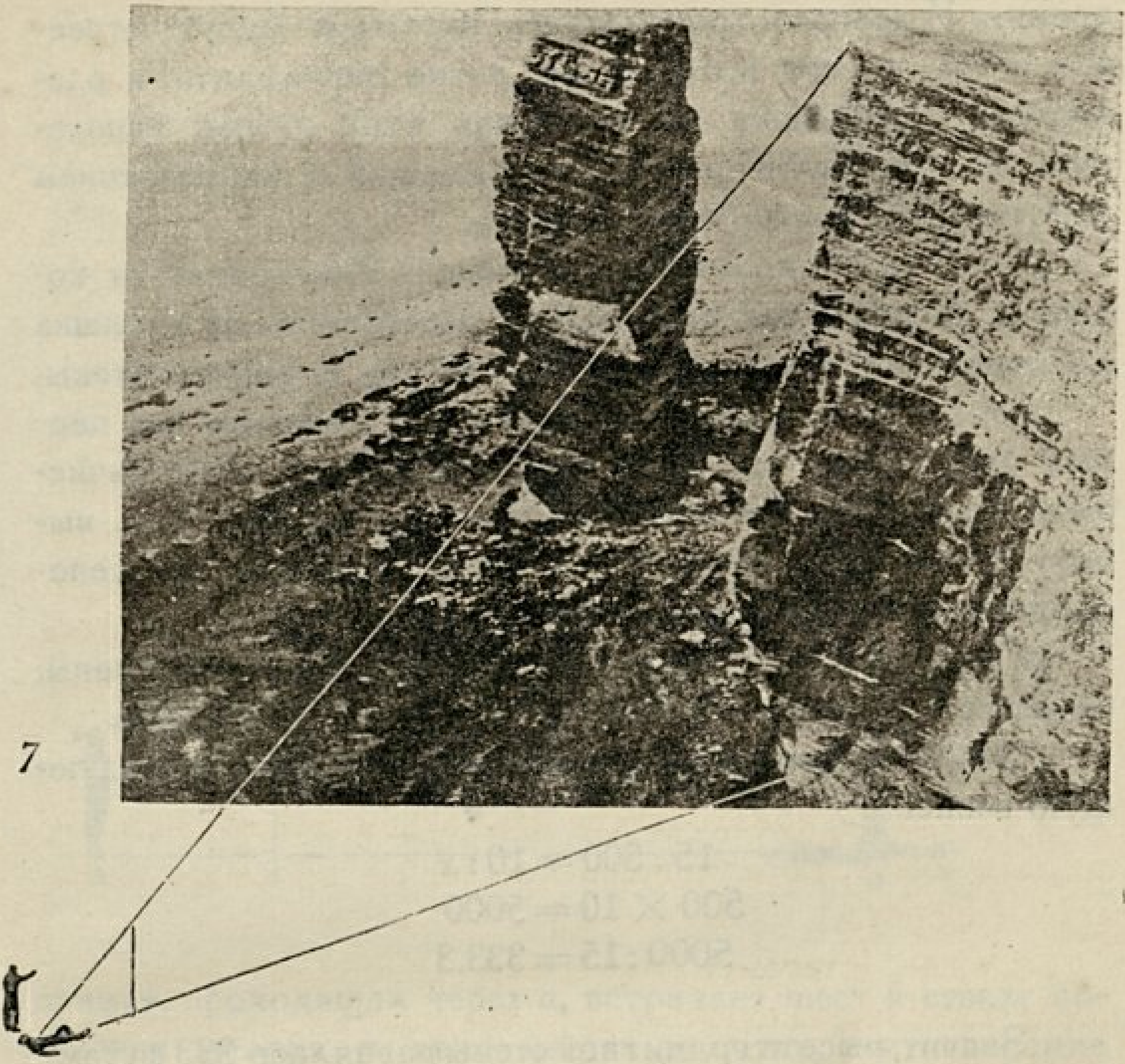
„—Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

„Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

„Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

„Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

„Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой ли-



7

нии видеть и конец шеста и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

„— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

„— Да.

„— Помнишь свойства подобных треугольников?

„— Их сходственные стороны пропорциональны.

„— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

„ — Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

„ — Да. И, следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т. е. высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

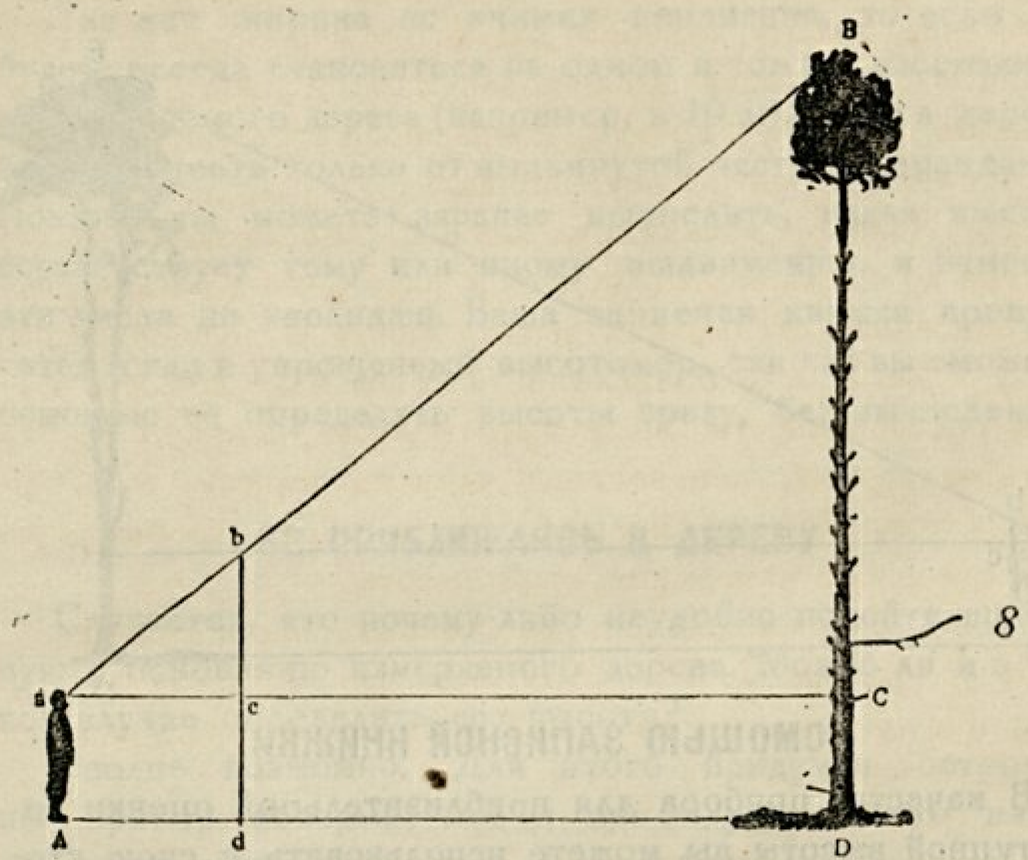
„Оба горизонтальные расстояния были измерены: меньшее равнялось 15 футам, большее — 500 футам.

„ По окончании измерений инженер составил следующую запись:

$$15 : 500 = 10 : x$$
$$500 \times 10 = 5000$$
$$5000 : 15 = 333{,}3$$

„Значит, высота гранитной стены равнялась 333 футам"

Этот способ, как и предыдущий, неудобен тем, что при пользовании им приходится ложиться на землю. Но вот видоизменение, свободное от такого неудобства. Запасшись шестом выше человеческого роста, втыкают его отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдя от шеста назад, по продолжению *Dd*, находят такую точку *A*, из которой, глядя на вершину дерева, видят на одной линии с ней верхнюю точку *b* шеста. При этом замечают (здесь нужны услуги помощника) точки *c* и *C*, в которых горизонтальная



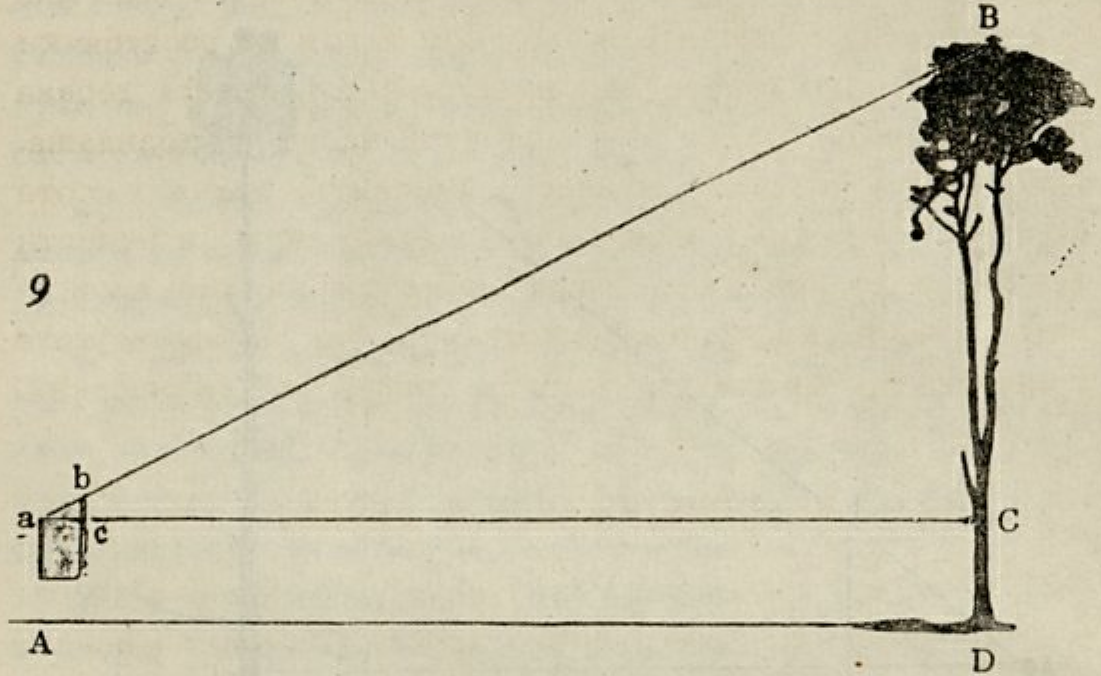
прямая, проходящая через a, встречает шест и ствол; помощник делает в этих местах пометки, — и измерение окончено. Остается только, на основании подобия треугольников abc и aBC, вычислить BC из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}.$$

Расстояние bc, aC и ac легко измерить непосредственно. К полученной величине BC нужно прибавить расстояние CD (которое также измеряется непосредственно) чтобы узнать искомую высоту дерева.



ПОМОЩЬЮ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ

В качестве прибора для приблизительной оценки но доступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехлик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаза так, как показано на упрощенном рис. 9. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки a, видеть вершину B дерева покрытой кончиком b карандаша. Тогда, вследствие подобия треугольников abc и aBC, высота BC определится из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac.$$

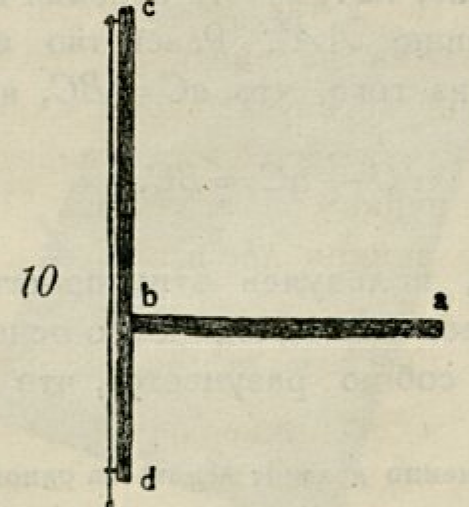
Расстояния bc, ac и aC измеряются непосредственно. К полученной величине BC надо прибавить еще длину CD, т. е. — на ровном месте — высоту глаза над почвой.

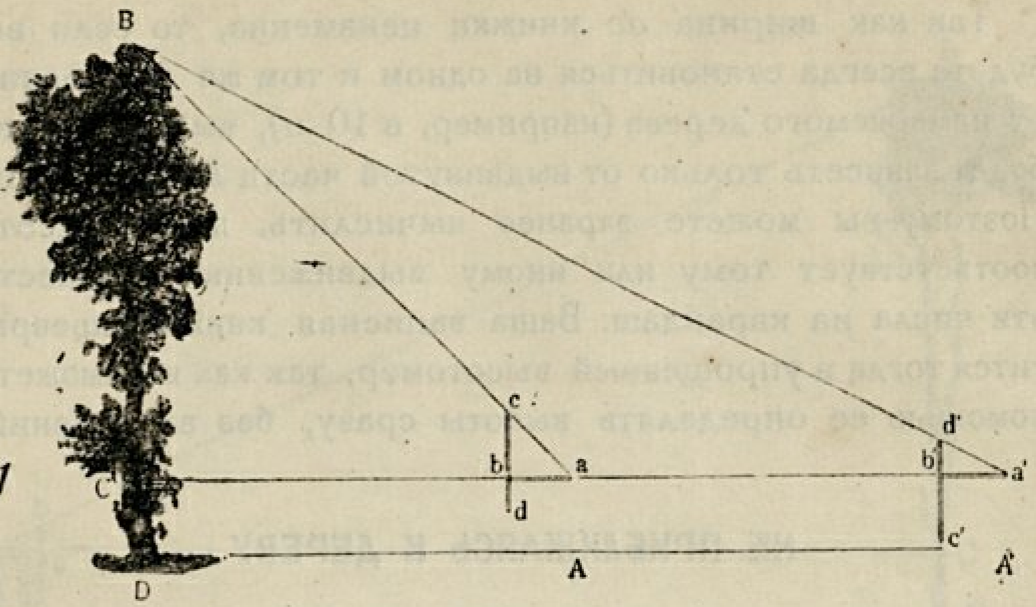
Так как ширина *ac* книжки неизменна, то если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например, в 10 *м*), высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части *bc* карандаша. Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш. Ваша записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер, так как вы сможете помощью ее определять высоты сразу, без вычислений.

НЕ ПРИБЛИЖАЯСЬ К ДЕРЕВУ

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Можно ли и в таком случае определить его высоту?

Вполне возможно. Для этого придуман остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки *ab* и *cd* (рис. 10) скрепляются под прямым углом так, чтобы *ab* равнялось *bc*, а *bd* составляло половину *ab*. Вот и весь прибор. Чтобы измерить им высоту, держат его в руках, направив планку





11

cd вертикально (для чего при ней имеется отвес — шнурок с грузиком), и становятся последовательно в двух местах: сначала (рис. 11) в точке A, где располагают прибор концом c вверх, а затем в точке A', подальше, где прибор держат вверх концом d. Точка A избирается так, чтобы, глядя из a на конец c, видеть его на одной прямой с верхушкой дерева. Точку же A' отыскивают так, чтобы, глядя из a' на точку d', видеть ее совпадающей с B. В отыскании этих двух точек A и A' [1] заключается все измерение, потому что искомая высота дерева BC равна расстоянию AA'. Равенство вытекает, как легко сообразить, из того, что $aC = BC$, а $a'C = 2\ BC$; значит,

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собою разумеется, что если подойти

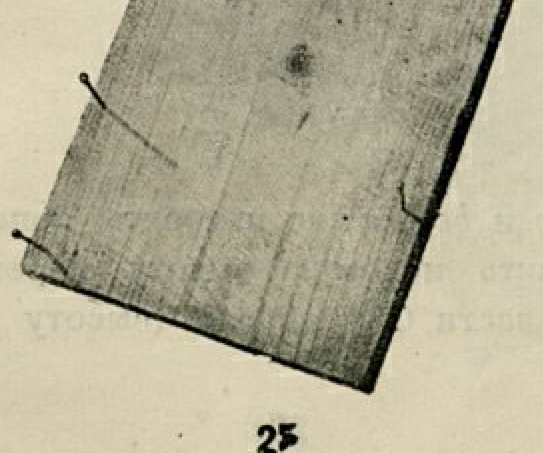
[1] Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева.

к стволу возможно, то достаточно найти только одну из точек — A или A', чтобы узнать его высоту.

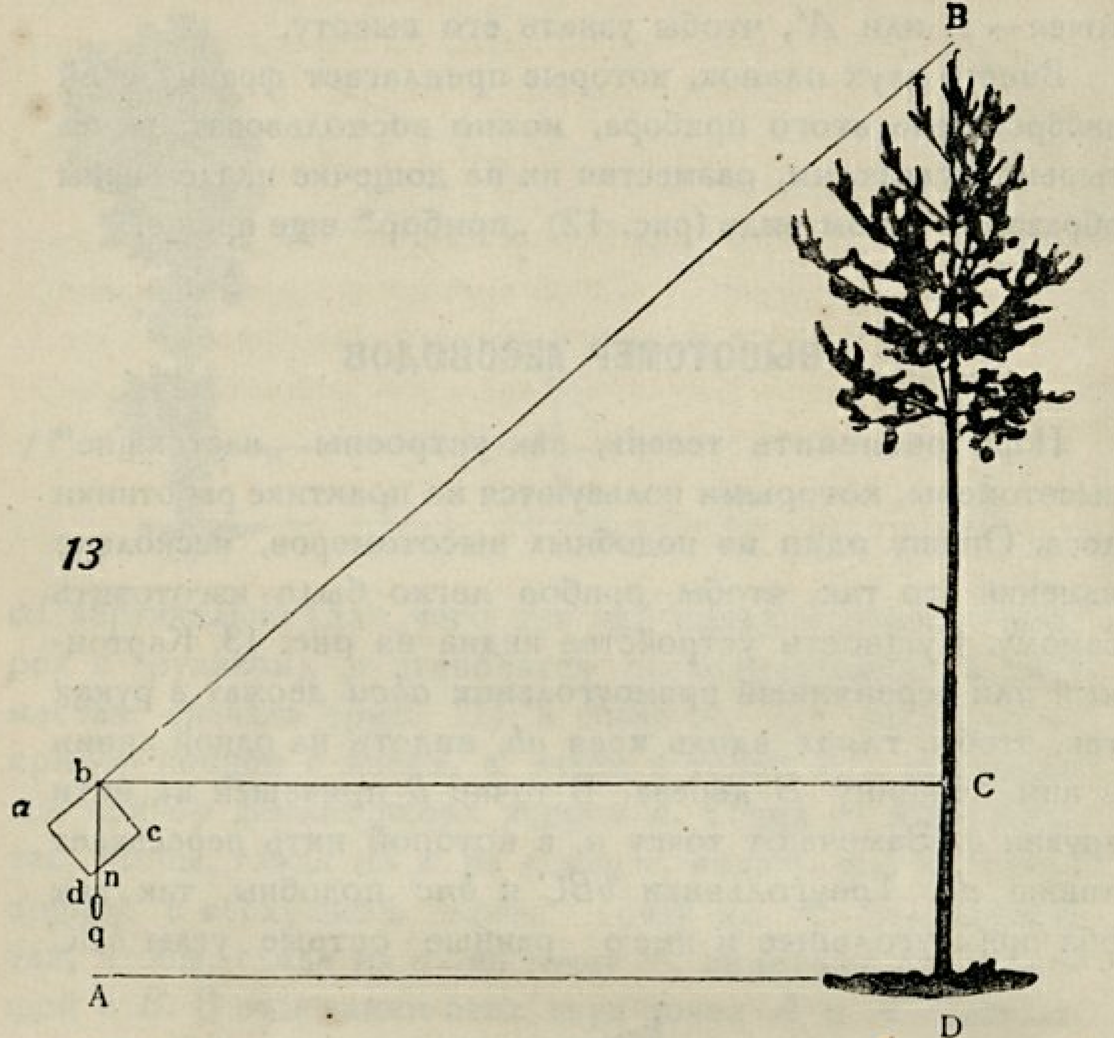
Вместо двух планок, которые предлагает французский изобретатель этого прибора, можно воспользоваться четырьмя булавками, разместив их на дощечке надлежащим образом: в таком виде (рис. 12) „прибор“ еще проще.

ВЫСОТОМЕР ЛЕСОВОДОВ

Пора объяснить теперь, как устроены „настоящие“ высотомеры, которыми пользуются на практике работники леса. Опишу один из подобных высотомеров, несколько изменив его так, чтобы прибор легко было изготовить самому. Сущность устройства видна из рис. 13. Картонный или деревянный прямоугольник $abcd$ держат в руках так, чтобы, глядя вдоль края ab, видеть на одной линии с ним вершину B дерева. В точке b привешен на нити грузик q. Замечают точку n, в которой нить пересекает линию dc. Треугольники bBC и bnc подобны, так как оба прямоугольные и имеют равные острые углы bBC



12



и bnc (с соответственно-перпендикулярными сторонами). Значит, мы в праве написать пропорцию:

$$BC : nc = bC : bc,$$

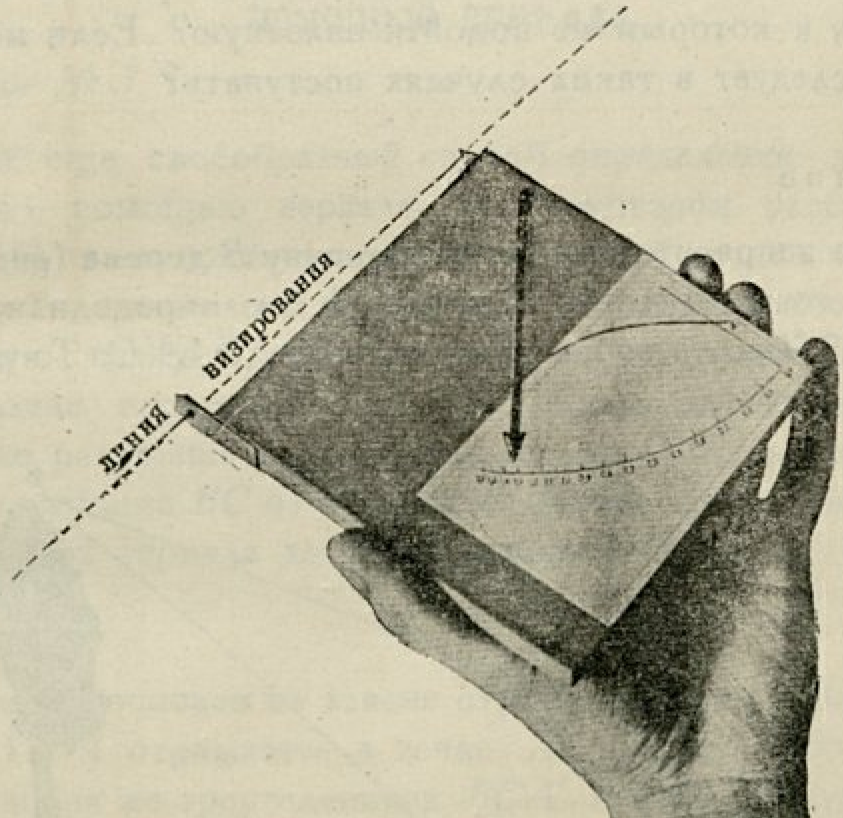
отсюда

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bc}.$$

Так как bC, nc и bc можно измерить непосредственно, то легко получить искомую высоту дерева, прибавив длину нижней части CD ствола (высоту прибора над почвой).

Остается добавить несколько подробностей. Если край bc дощечки сделать, например, ровно в 10 *см*, а на краю dc нанести сантиметровые деления, то отношение $\frac{nc}{bc}$ будет всегда выражаться десятичной дробью, прямо указывающей, какую долю расстояния bC составляет высота BC дерева. Пусть, например, нить остановилась против 7-го деления (т. е. $nc = 7$ *см*); это значит, что высота дерева над уровнем глаза составляет 0,7 расстояния наблюдателя от ствола.

Второе улучшение относится к способу наблюдения: чтобы удобно было смотреть вдоль линии ab, можно отогнуть у верхних углов картонного прямоугольника два квадратика с просверленными в них дырочками: одной



14

поменьше — у глаза, другой побольше — для наведения на верхушку дерева (рис. 14).

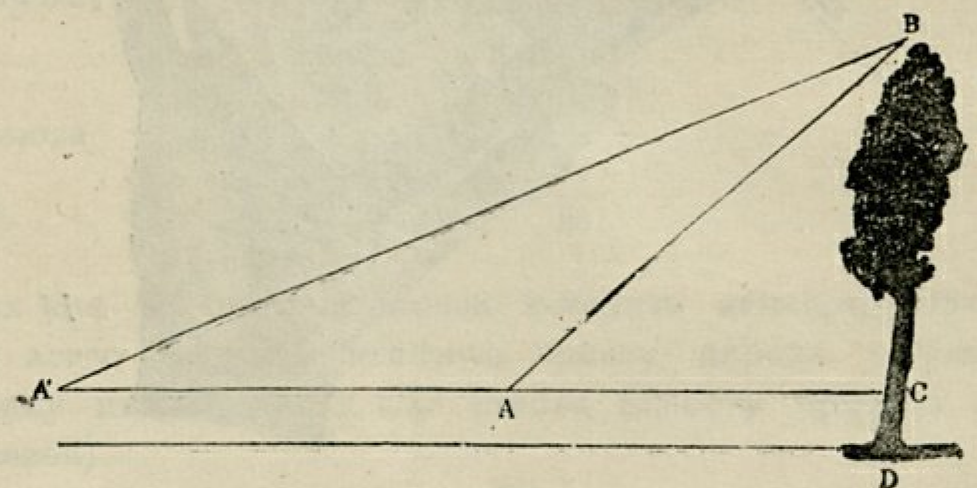
Дальнейшее усовершенствование представляет прибор, изображенный в $^1/_3$ натуральной величины на рис. 14. Изготовить его в таком виде легко и недолго; для этого не требуется особенного уменья мастерить. Занимая в кармане не много места, он доставит вам возможность во время экскурсии быстро определять высоты встречных предметов — деревьев, столбов, зданий и т. п. (Инструмент входит в состав разработанного автором этой книги набора „Геометрия на вольном воздухе").

Задача № 2

Можно ли описанным сейчас высотомером измерять деревья, к которым не подойти вплотную? Если можно, то как следует в таких случаях поступать?

Решение

Надо направить прибор на вершину B дерева (рис. 15) с двух точек A и A'. Пусть в A мы определили, что $BC = 0{,}9AC$, а в точке A' — что $BC = 0{,}4A'C$. Тогда мы



15

знаем, что

$$AC = \frac{BC}{0{,}9};\ A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

откуда

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18} BC.$$

Итак,

$$AA' = \frac{25}{18} BC, \text{ или } BC = \frac{18}{25} A'A = 0{,}72 A'A.$$

Вы видите, что, измерив расстояние $A'A$ между обоими местами наблюдения и взяв определенную долю этой величины, мы узнаем искомую недоступную и неприступную высоту.

ПОМОЩЬЮ ЗЕРКАЛА

Задача № 3

Вот еще своеобразный способ определения высоты дерева — помощью зеркала. На некотором расстоянии (рис. 16) от измеряемого дерева, на ровной земле в точке C кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D, стоя в которой наблюдатель видит в зеркале верхушку A дерева. Тогда дерево (AB) во столько раз выше роста наблюдателя (ED), во сколько раз расстояние BC от зеркала до дерева больше расстояния CD от зеркала до наблюдателя. Почему?

Решение

Способ основан на законе отражения света. Вершина (рис. 17) A отражается в точке A' так, что $AB = A'B$. Из подобия же треугольников BCA' и CED следует, что

$$A'B : ED = BC : CD.$$

В этой пропорции остается лишь заменить $A'B$ равным ему AB, чтобы обосновать указанное в задаче соотношение.

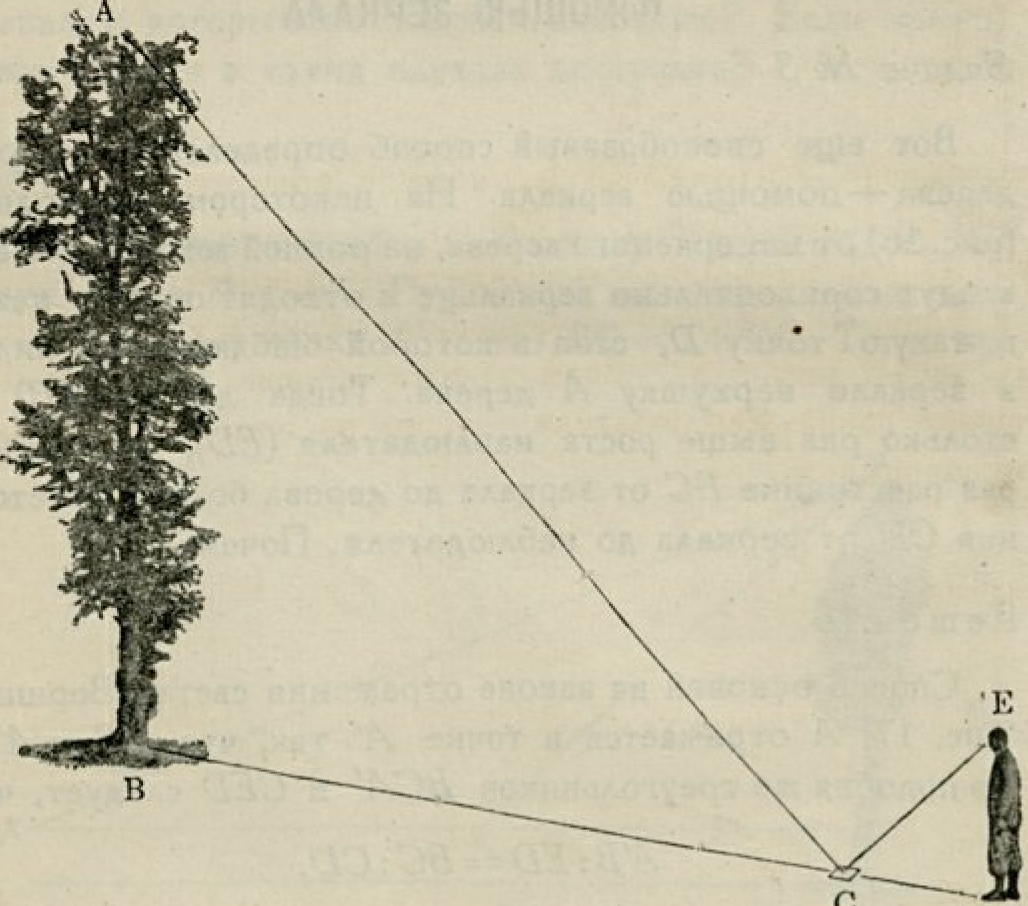
Этот удобный и нехлопотливый способ можно применять во всякую погоду, но не в густом насаждении, а к одиноко стоящему дереву.

Задача № 4

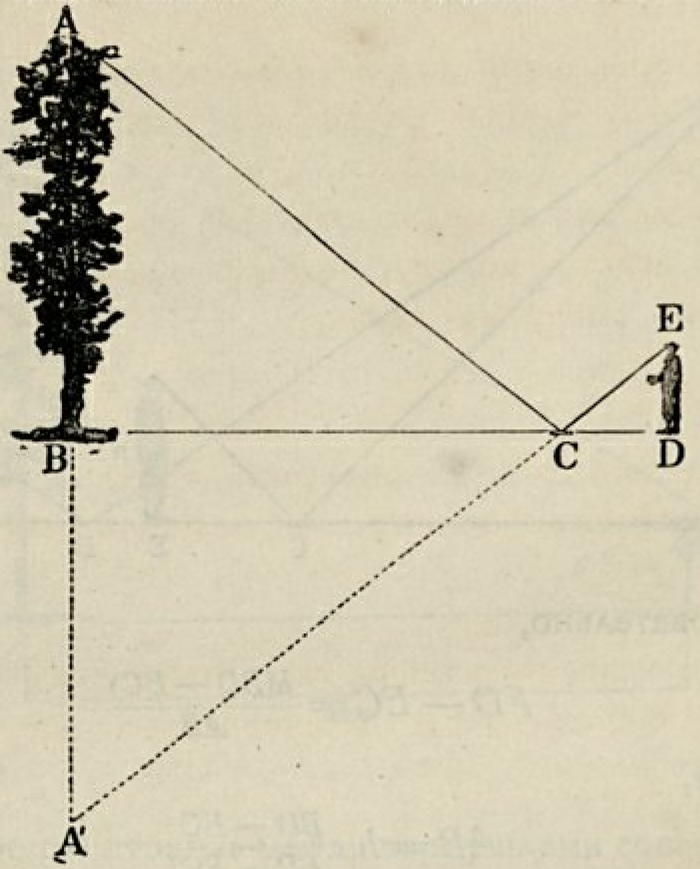
Как, однако, следует поступать, когда к измеряемому дереву невозможно почему-либо подойти вплотную?

Решение

Это — старинная задача, насчитывающая за собою не менее 500 лет. Ее рассматривает средневековый



16



17

математик Антоний де Кремона в сочинении „О практическом землемерии“ (1400 г.).

Задача разрешается двукратным применением сейчас описанного способа — помещением зеркала в двух местах (C и D, рис. 18). Если высота дерева AB, а возвышение глаза наблюдателя — h, то из подобия треугольников имеем:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{h}{EC},$$

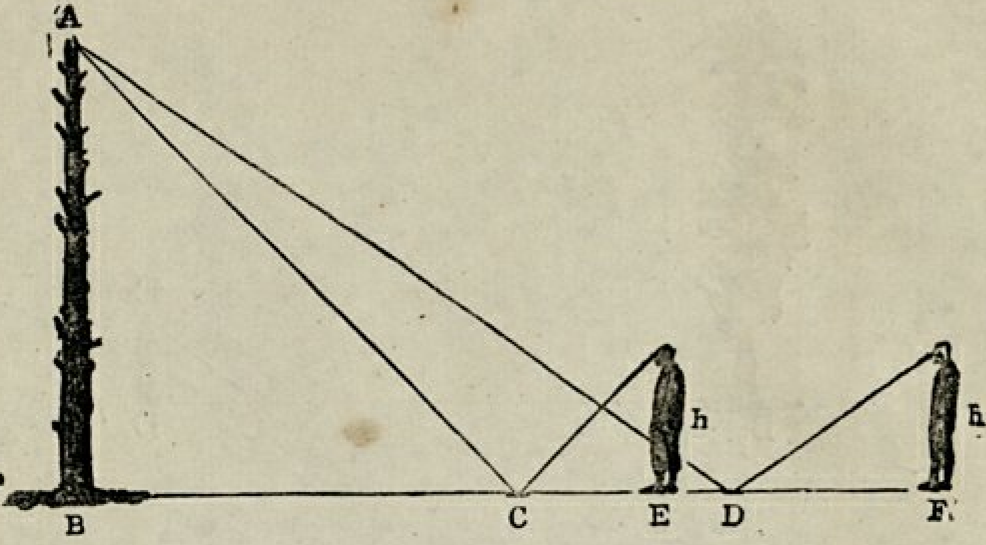
откуда

$$EC=\frac{BC\cdot h}{AB};$$

$$\frac{AB}{BD}=\frac{h}{FD},$$

откуда

$$FD=\frac{BD\cdot h}{AB}.$$



18

Следовательно,

$$FD - EC = \frac{h(BD - BC)}{AB}$$

и, значит,

$$AB = h \cdot \frac{BD - BC}{FD - EC},$$

т. е. искомая высота дерева равна возвышению глаза наблюдателя, умноженному на отношение расстояния между положениями зеркала к разности расстояний наблюдателя от зеркала.

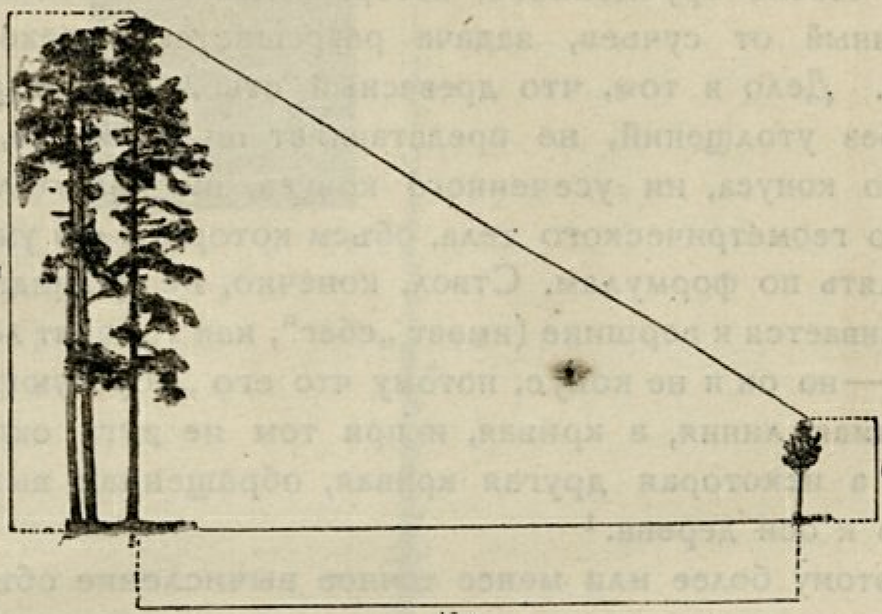
Прежде чем окончить беседу об измерении высоты деревьев, предложу читателю еще одну „лесную“ задачу.

ДВЕ СОСНЫ

Задача № 5

В 40 *м* одна от другой растут две сосны. Вы измерили их высоту: одна оказалась в 31 *м* высотой, другая, молодая, — всего 6 *м*.

Можете ли вы вычислить, как велико расстояние между их верхушками?



19

Решение

Искомое расстояние между верхушками сосен (рис. 19), по теореме Пифагора, равно

$$\sqrt{40^2+25^2}=47\ м.$$

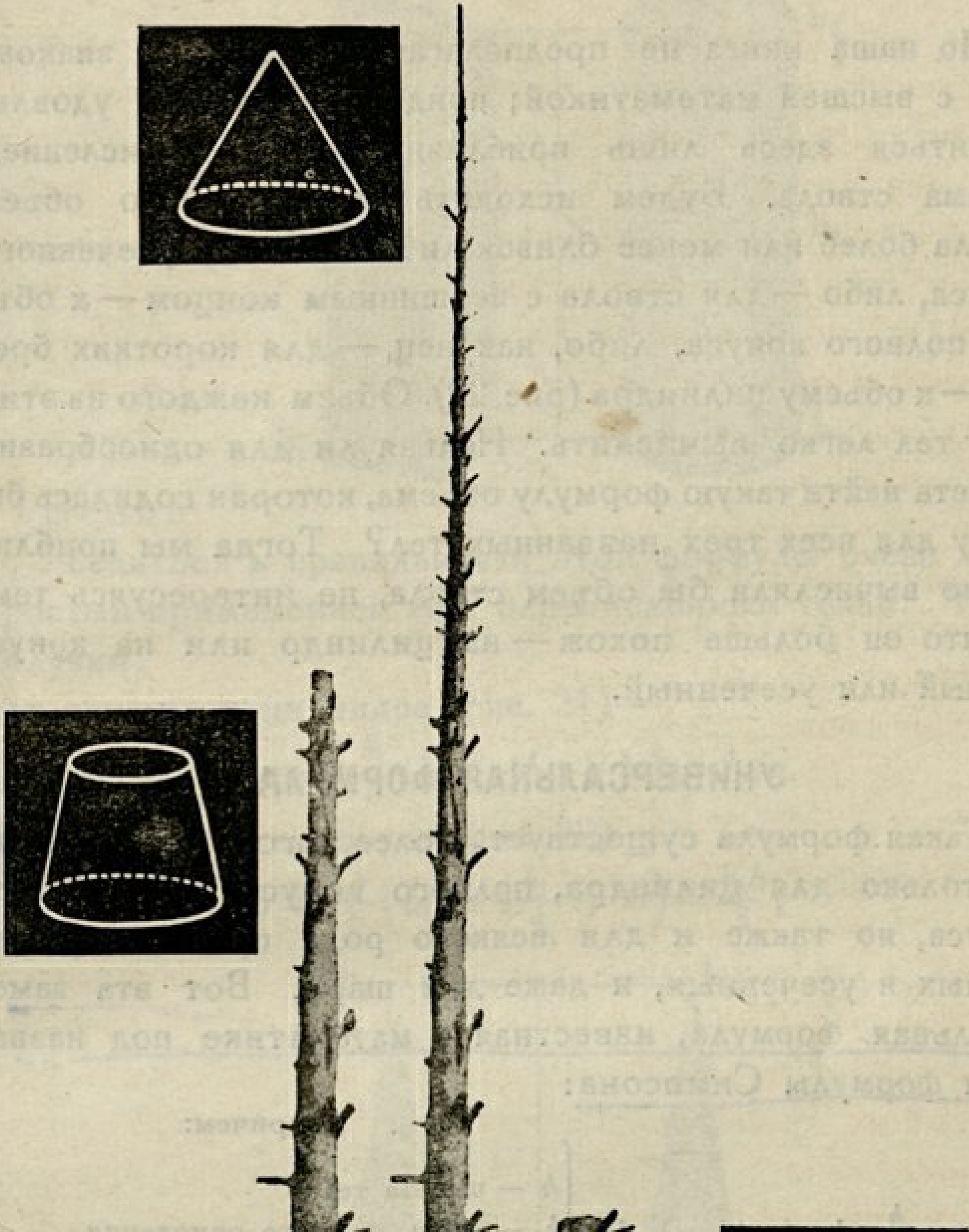
ФОРМА ДРЕВЕСНОГО СТВОЛА

Теперь вы можете уже, прогуливаясь по лесу, определить — чуть не полудюжиной различных способов — высоту любого дерева. Вам интересно будет, вероятно, определить также и его объем, вычислить, сколько в нем кубических метров древесины, а заодно и взвесить его, — узнать, можно ли было бы, например, увезти такой ствол на одной телеге. Обе эти задачи уже не столь просты, как определение высоты; специалисты не нашли способов точного ее разрешения и довольствуются лишь более или менее приближенной оценкой. Даже и для ствола срубленного, который лежит перед вами очищенный от сучьев, задача разрешается далеко не просто. Дело в том, что древесный ствол, самый ровный, без утолщений, не представляет ни цилиндра, ни полного конуса, ни усеченного конуса, ни какого-либо другого геометрического тела, объем которого мы умеем вычислять по формулам. Ствол, конечно, не цилиндр, — он суживается к вершине (имеет „сбег", как говорят лесоводы), — но он и не конус, потому что его „образующая" не прямая линия, а кривая, и при том не дуга окружности, а некоторая другая кривая, обращенная выпуклостью к оси дерева.[1]

Поэтому более или менее точное вычисление объема древесного ствола выполнимо лишь средствами аналитической геометрии. Иным читателям покажется, быть может, странным, что для измерения простого бревна приходится обращаться к услугам высшей математики. Многие думают, что высшая математика имеет отношение только к каким-то особенным предметам, в обиходной же жизни применима всегда лишь математика элементарная. Это совершенно не верно: можно довольно точно вычислить объем звезды или планеты, пользуясь элементами геометрии, между тем как точный расчет объема длинного бревна или пивной бочки невозможен без аналитической геометрии и интегрального исчисления.

---

[1] Всего ближе кривая это подходит к так называемой „полукубической параболе" ($y^3 = ax^2$); тело, полученное вращением этой параболы, называется „нейлоидом" (по имени старинного английского математика Нейля, нашедшего способ определять длину дуги такой кривой). Ствол выросшего в лесу дерева по форме приближается к нейлоиду. Расчет объема нейлоида выполняется приемами высшей математики.



20

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

Но наша книга не предполагает у читателя знакомства с высшей математикой; придется поэтому удовлетвориться здесь лишь приблизительным вычислением объема ствола. Будем исходить из того, что объем ствола более или менее близок либо к объему усеченного конуса, либо — для ствола с вершинным концом — к объему полного конуса, либо, наконец, — для коротких бревен — к объему цилиндра (рис. 20). Объем каждого из этих трех тел легко вычислить. Нельзя ли для однообразия расчета найти такую формулу объема, которая годилась бы сразу для всех трех названных тел? Тогда мы приближенно вычисляли бы объем ствола, не интересуясь тем, на что он больше похож — на цилиндр или на конус, полный или усеченный.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Такая формула существует; более того, она пригодна не только для цилиндра, полного конуса и усеченного конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид полных и усеченных, и даже для шара. Вот эта замечательная формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

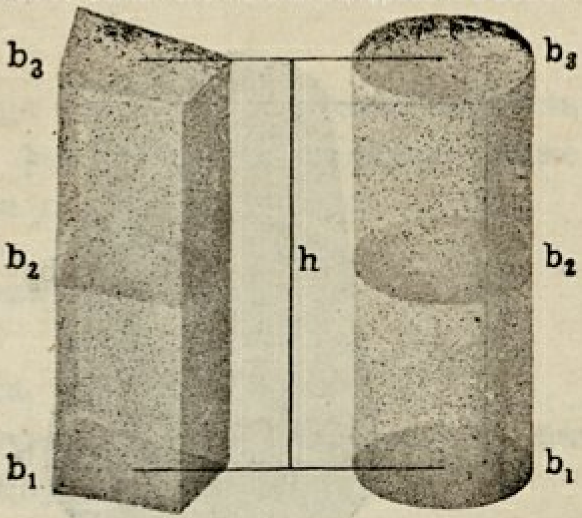
причем:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3) \quad \begin{cases} h \text{ — высота тела} \\ b_1 \text{ — площ. нижнего основания} \\ b_2 \text{ — „ среднего[1] сечения} \\ b_3 \text{ — „ верхнего основания} \end{cases}$$

Задача № 6

Доказать, что по приведенной сейчас формуле можно вычислить объем следующих семи геометрических тел: призмы, пирамиды полной, пирамиды усеченной, цилиндра, конуса полного, конуса усеченного, шара.

[1] Т. е. площадь сечения тела посредине его высоты.



21

Решение

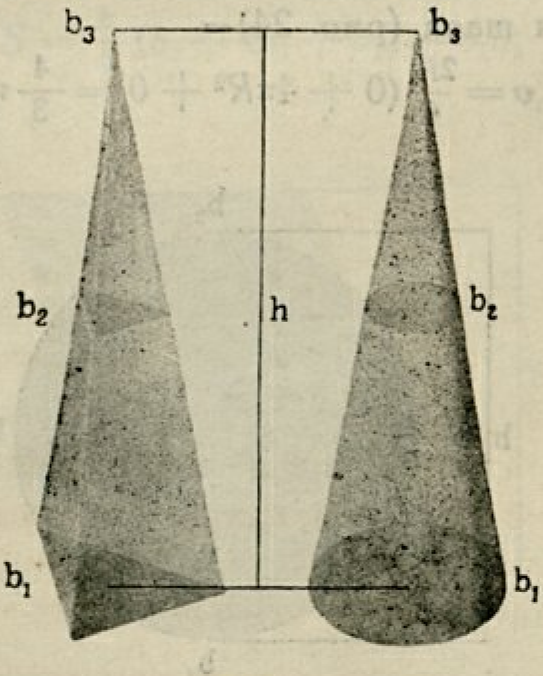
Убедиться в правильности этой формулы очень легко простым применением ее к перечисленным телам. Тогда получим:

для призмы и цилиндра (рис. 21) —

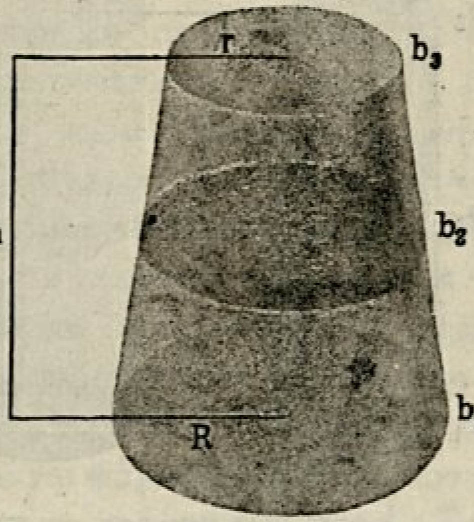
$$v = \frac{h}{6} \cdot (b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

для пирамиды и конуса (рис. 22) —

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1 h}{3};$$



22



23

для усеченного конуса (рис. 23) —

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] =$$

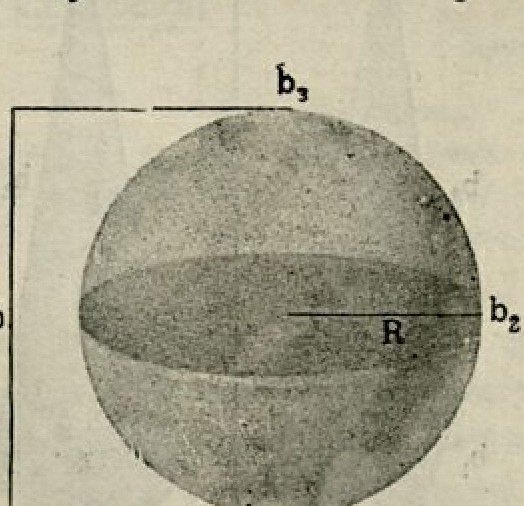
$$= \frac{h}{6}(\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2);$$

для усеченной пирамиды доказательство ведется сходным образом;

наконец, для шара (рис. 24) —

$$v = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



24

Задача № 7

Отметим еще одну любопытную особенность нашей универсальной формулы: она годится также для вычисления площади плоских фигур:

паралеллограмма,

трапеции и

треугольника,

если под h разуметь, как прежде, высоту фигуры,

под b_1 — длину нижнего основания,

под b_2 — среднего,

под b_3 — верхнего.

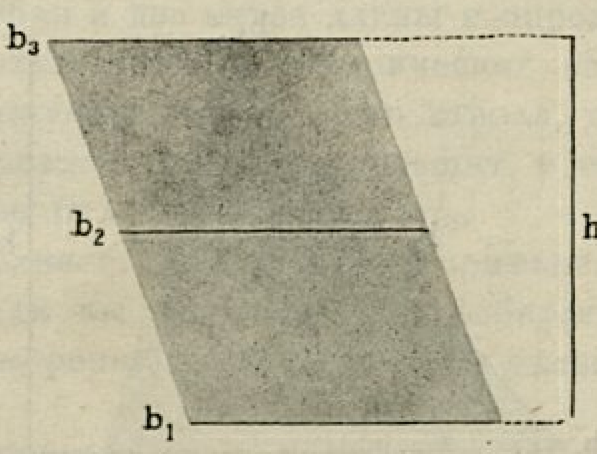
Как в этом убедиться?

Решение

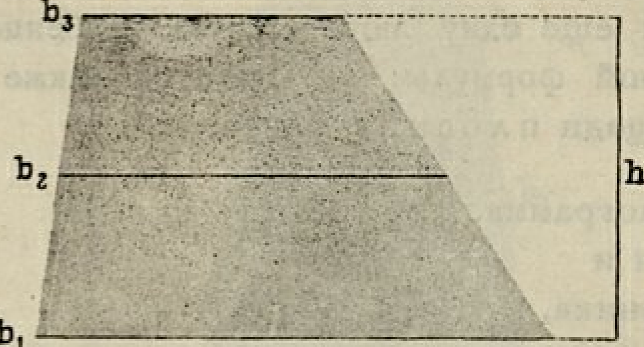
Применяя формулу, имеем:

для параллелограмма (квадрата, прямоугольника) (рис. 25)

$$S=\frac{h}{6}(b_1+4b_1+b_1)=b_1h;$$



25



26

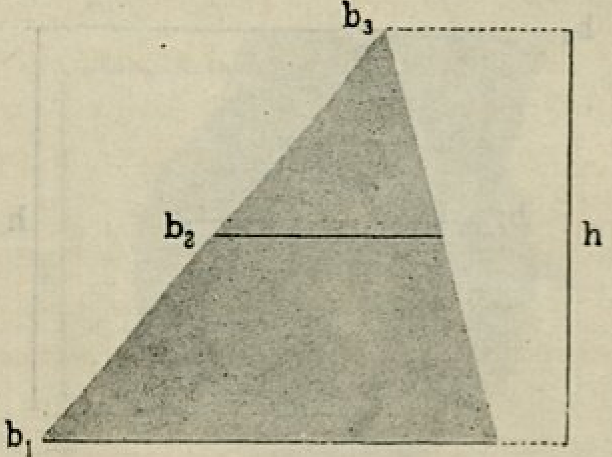
для трапеции (рис. 26) —

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3),$$

для треугольника (рис. 27) –

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = \frac{b_1 h}{2}.$$

Вы видите, что формула наша имеет достаточно прав называться **у н и в е р с а л ь н о й**.



27

ОБЪЕМ И ВЕС ДЕРЕВА НА КОРНЮ

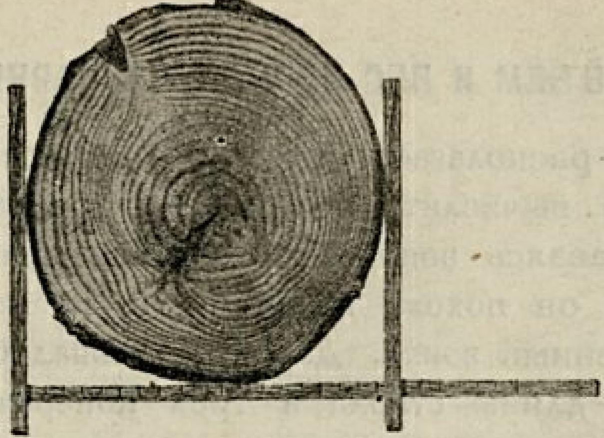
Итак, вы располагаете формулой, по которой можете приближенно вычислить объем ствола *срубленного* дерева, не задаваясь вопросом о том, на какое геометрическое тело он похож: на цилиндр, на полный конус или на усеченный конус. Для этого понадобятся четыре измерения — длины ствола и трех поперечников: нижнего сруба, верхнего и посередине длины. Измерение нижнего и верхнего поперечника очень просто; непосредственное же определение среднего поперечника без специального приспособления („мерной вилки" лесоводов, рис. 28[1]) довольно неудобно. Но трудность можно обойти, если измерить бечевкой окружность ствола и разделить ее длину на $3^1/_7$, чтобы получить диаметр.

Объем срубленного дерева получится при этом с точностью, достаточной для многих практических целей. Короче, но менее точно, решается эта задача, если вычислить объем ствола, как объем цилиндра, диаметр основания которого равен диаметру ствола по середине длины: при этом результат получается, однако, преуменьшенный, иногда на 12%. Но если разделить мысленно ствол на отрубки в два метра длины и определить объем каждого из этих почти цилиндрических частей, чтобы, сложив их, получить объем всего ствола, то результат получится гораздо лучший: он грешит в сторону преуменьшения не более чем на 2—3%.

Все это, однако, совершенно неприменимо к дереву на корню: если вы не собираетесь взбираться на него, то вашему измерению доступен только диаметр его ниж-

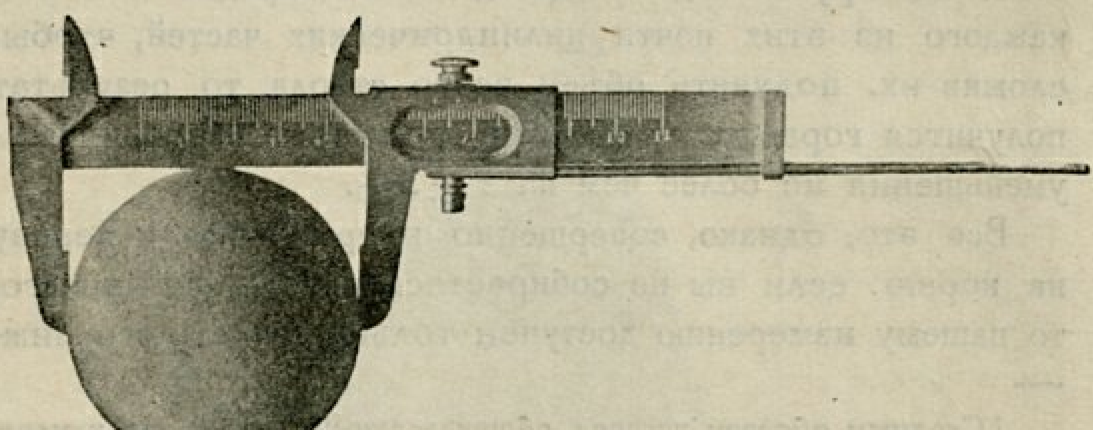
---

[1] Сходным образом устроен общеизвестный прибор для измерения диаметра круглых изделий — штангенциркуль (рис. 29).



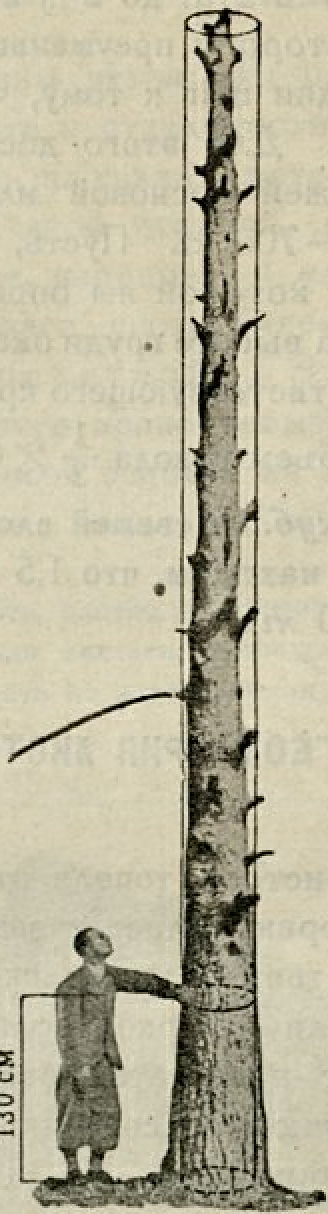
28

ней части. В этом случае придется для определения объема довольствоваться лишь весьма приближенной оценкой, утешаясь тем, что и профессиональные лесоводы поступают обычно сходным же образом. Они пользуются для этого таблицей так называемых „видовых чисел“, т. е. чисел, которые показывают, какую долю объем измеряемого дерева составляет от объема цилиндра той же высоты и диаметра, измеренного на высоте груди взрослого человека, т. е. 130 *см* (на этой высоте его удобнее всего измерять). Рис. 30 наглядно поясняет сказанное. Конечно, „видовые числа“ различны для деревьев разной породы и высоты, так как форма ствола изменчива. Но колебания не особенно велики: для стволов сосны и для ели (выросших в густом наса-



29

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.



30

ждении) „видовые числа“ заключаются между 0,45 и 0,51, т. е. равны, примерно, половине.

Значит, без большой ошибки можно принимать за объем хвойного дерева на корню половину объема цилиндра той же высоты с диаметром, равным поперечнику дерева на высоте груди. Это, разумеется, лишь приближенная оценка, но не слишком отклоняющаяся от истинного результата: до 2% в сторону преувеличения и до 10% в сторону преуменьшения.[1]

Отсюда уже один шаг к тому, чтобы оценить и вес дерева на корню. Для этого достаточно лишь знать, что 1 *куб. м* свежей сосновой или еловой древесины весит около 600—700 *кг*. Пусть, например, вы стоите возле ели, высоту которой вы определили в 28 *м*, а окружность ствола на высоте груди оказалась равной 120 *см*. Тогда площадь соответствующего круга равна 1100 *кв. см*, или 0,11 *кв. м*, а объем ствола $\frac{1}{2} \times 0{,}11 \times 28 = 1{,}5$ *куб. м*. Принимая, что 1 *куб. м* свежей еловой древесины весит в среднем 650 *кг*, находим, что 1,5 *куб. м* должны весить около тонны (1000 *кг*).

ГЕОМЕТРИЯ ЛИСТЬЕВ

Задача № 8

В тени серебристого тополя от его корней разрослась поросль. Сорвите лист и заметьте, как он велик по сравнению с листьями родительского дерева,—особенно с теми, что выросли на ярком солнце (рис. 31). Теневые листья возмещают недостаток света размерами своей площади, улавливающей солнечные лучи. Разобраться в этом — задача ботаника. Но и геометр может сказать здесь свое слово: он может определить, во сколько именно раз площадь листа поросли больше площади листа родительского дерева.

Как решили бы вы эту задачу?

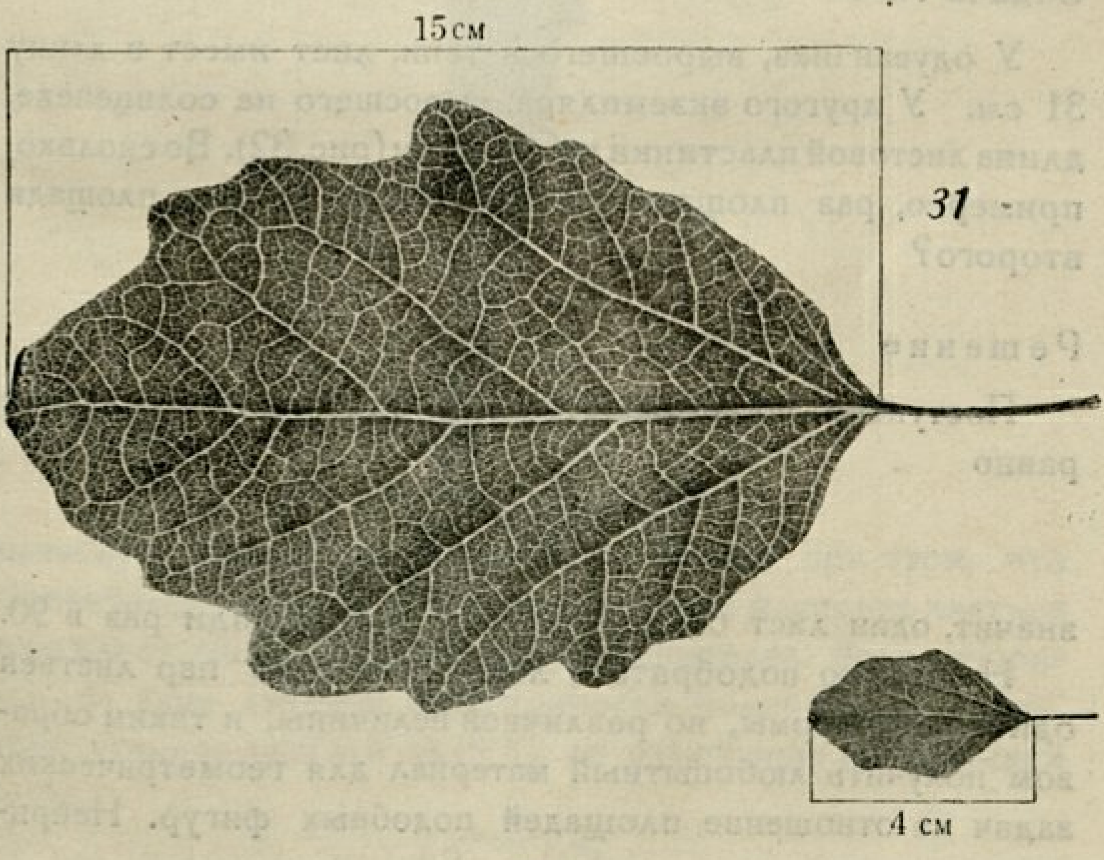
[1] Необходимо помнить, что „видовые числа“ относятся лишь к деревьям, выросшим в лесу, т. е. к высоким и гонким (ровным, без углов); для отдельно стоящих, ветвистых деревьев нельзя указать подобных общих правил вычисления объема.

Решение

Можно итти двояким путем. Во-первых, определить площадь каждого листа в отдельности и найти их отношение. Измерить же площадь листа можно, покрывая его прозрачной клетчатой бумагой, каждый квадратик которой соответствует, например, 4 *кв. мм* (листок прозрачной клетчатой бумаги, употребляемой для подобных целей, называется палеткой). Это хотя и вполне правильный, но чересчур кропотливый способ.[1]

Более короткий способ основан на том, что оба листа, различные по величине, имеют все же одинаковую или

[1] У этого способа есть, однако, и преимущество: пользуясь им можно сравнивать площади листьев, имеющих неодинаковую форму, — чего нельзя сделать по далее описанному способу.



почти одинаковую форму: другими словами — это фигуры, геометрически подобные. Площади таких фигур, мы знаем, относятся как квадраты их линейных размеров. Значит, определив, во сколько раз один лист длиннее или шире другого, мы простым возведением этого числа в квадрат узнаем отношение их площадей. Пусть лист поросли имеет в длину 15 *см*, а лист с ветви дерева — только 4 *см*; отношение линейных размеров $\frac{15}{4}$, и, значит, по площади один больше другого в $\frac{225}{16}$, т. е. в 14 раз. Округляя (так как полной точности здесь быть не может), мы в праве утверждать, что порослевый лист больше древесного по площади, примерно, в 15 раз.

Еще пример.

Задача № 9

У одуванчика, выросшего в тени, лист имеет в длину 31 *см*. У другого экземпляра, выросшего на солнцепеке, длина листовой пластинки всего 3,3 *см* (рис. 32). Во сколько, примерно, раз площадь первого листа больше площади второго?

Решение

Поступаем по предыдущему. Отношение площадей равно

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} = 87;$$

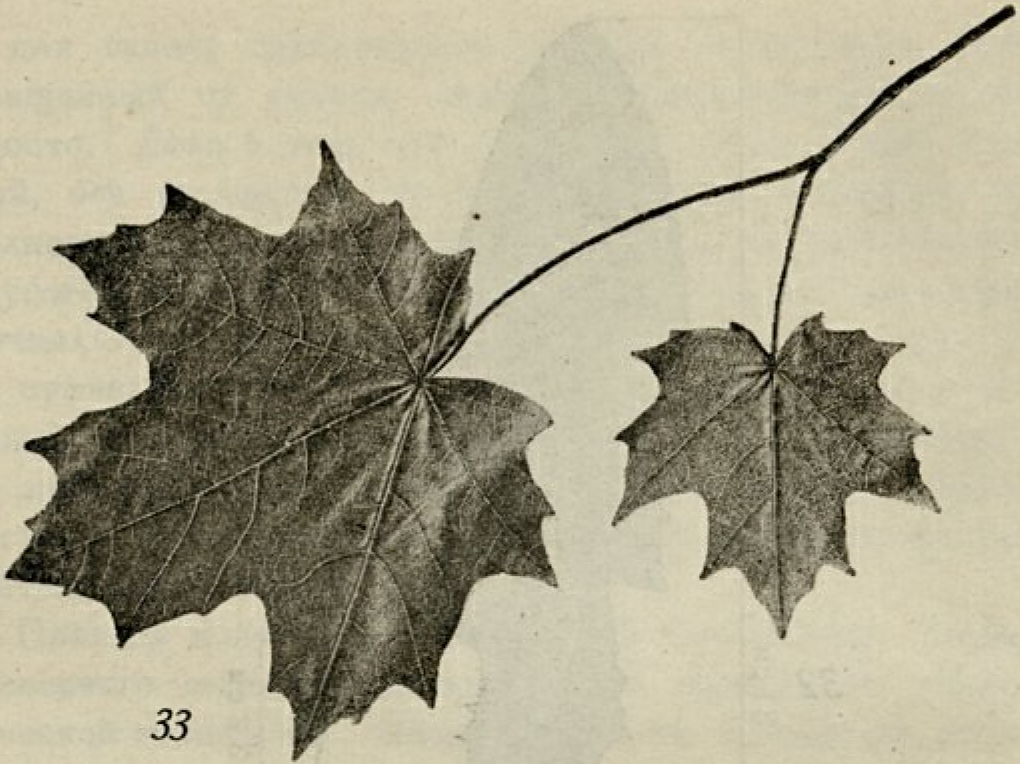
значит, один лист больше другого по площади раз в 90.

Не трудно подобрать в лесу множество пар листьев одинаковой формы, но различной величины, и таким образом получить любопытный материал для геометрических задач на отношение площадей подобных фигур. Непри-

32

вычному глазу всегда кажется странным при этом, что сравнительно небольшая разница в длине и ширине листьев порождает заметную разницу в их площадях. Если, например, из двух листьев, геометрически подобных по форме, один длиннее другого на 20%, то отношение их площадей равно

$$1,2^2 = 1,4,$$



33

т. е. разница составляет 40%. А при различии ширины в 40% один лист превышает другой по площади в

$$1{,}4^2 \approx 2,$$

т. е. почти вдвое.

Задачи № 10 и 11

Предлагаем читателю определить отношение площадей двух пар листьев, изображенных здесь в натуральную величину (рис. 33 и 34).

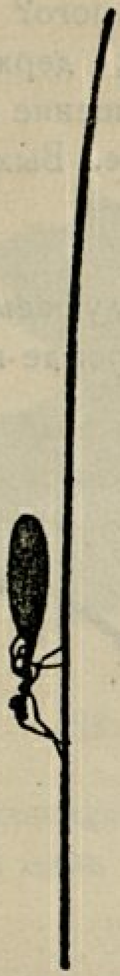
ШЕСТИНОГИЕ БОГАТЫРИ

Удивительные создания муравьи! Проворно взбегая по стебельку вверх с тяжелой, для своего крошечного роста, ношей в челюстях (рис. 35), муравей задает наблюдательному человеку головоломную задачу: откуда у насекомого берется сила, чтобы без видимого напряжения втаскивать груз в десять раз тяжелее его самого? Ведь человек не мог бы взбегать по лестнице, держа на плечах, например, пианино (рис. 36), — а отношение груза к весу тела у муравья, примерно, такое же. Выходит, что муравей относительно сильнее человека!

Так ли?

Без геометрии здесь не разобраться. Послушаем, что говорит специалист (проф. А. Ф. Брандт), прежде всего,

34



35

36

о силе мускулов, а затем и о поставленном сейчас вопросе соотношения сил насекомого и человека:

„Живой мускул уподобляется упругому шнурку; только сокращение его основано не на упругости, а на других причинах, и проявляется нормально под влиянием нервного возбуждения, а в физиологическом опыте от прикладывания электрического тока к соответствующему нерву или непосредственно к самому мускулу.

„Опыты весьма легко проделываются на мускулах, вырезанных из только что убитой лягушки, так как мускулы холоднокровных животных весьма долго и вне организма, даже при обыкновенной температуре, сохраняют свои жизненные свойства. Форма опыта очень простая. Вырезают главный мускул, разгибающий заднюю лапу, — мускул икр — вместе с куском бедренной кости, от которой он берет начало, и вместе с концевым сухожилием. Этот мускул оказывается наиболее удобным и по своей величине, и по форме, и по легкости препаровки. За обрезок кости мускул подвешивают на станке, а сквозь сухожилие продевают крючок, на который нацепляют гирю. Если до такого мускула дотрагиваться проволоками, идущими от гальванического элемента, то он моментально сокращается, укорачивается и приподнимает груз. Постепенным накладыванием дополнительных разновесок легко определить максимальную подъемную способность мускула. Свяжем теперь по длине два, три, четыре одинаковые мускула и станем раздражать их сразу. Этим мы не достигнем большей подъемной силы, а груз будет подниматься лишь на большую высоту, соответственно суммировке укорочений отдельных мускулов. Зато, если свяжем два, три, четыре мускула, в пучок, то вся система будет при раздражении поднимать и в соответственное число раз больший груз. Точно такой же результат, очевидно, получился бы и тогда, если бы мускулы между собою срослись. Итак, мы убеждаемся в том, что подъемная сила мускулов зависит не от длины или общей массы, а лишь от толщины, т. е. поперечного разреза.

„После этого отступления обратимся к сличению одинаково устроенных, геометрически подобных, но различных по величине животных. Мы представим себе двух животных: первоначальное и вдвое увеличенное во всех линейных измерениях. У второго объем и вес всего тела, а также каждого из его органов, будет в 8 раз больше;

все же соответственные плоскостные измерения, в том числе и поперечное сечение мускулов, лишь в 4 раза больше. Оказывается, мускульная сила, по мере того как животное разрастается до двойной длины и восьмерного веса, увеличивается лишь в четыре раза, т. е. животное сделалось относительно вдвое слабее. На этом основании животное, которое втрое длиннее (с поперечными сечениями в 9 раз обширнейшими и с весом в 27 раз большим), оказывалось бы относительно втрое слабее, а то, которое вчетверо длиннее — вчетверо слабее и т. д.

„Законом неодинакового нарастания объема и веса животного, а вместе с тем и мускульной силы, объясняется, почему насекомое — как мы это наблюдаем на муравьях, хищных осах и т. д. — может тащить тяжести, в 30, в 40 раз превосходящие вес собственного их тела, тогда как человек в состоянии тащить нормально — мы исключаем гимнастов и носильщиков тяжестей — лишь около $\frac{9}{10}$, а лошадь, на которую мы взираем, как на прекрасную живую рабочую машину, и того меньше, а именно лишь около $\frac{7}{10}$ своего веса“.[1]

[1] Подробно об этом — см. „Занимательную механику“ Я. И. Перельмана, гл. X: „Механика в живой природе“.

ГЛАВА ВТОРАЯ

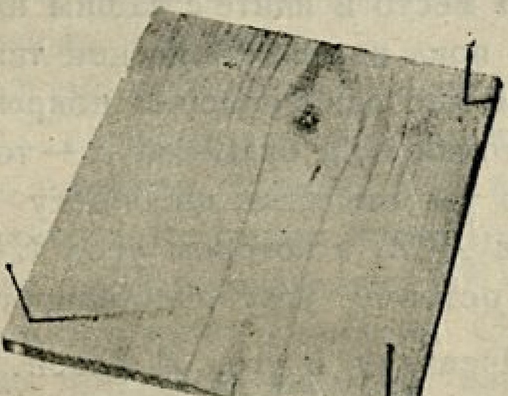
ГЕОМЕТРИЯ У РЕКИ

ИЗМЕРИТЬ ШИРИНУ РЕКИ

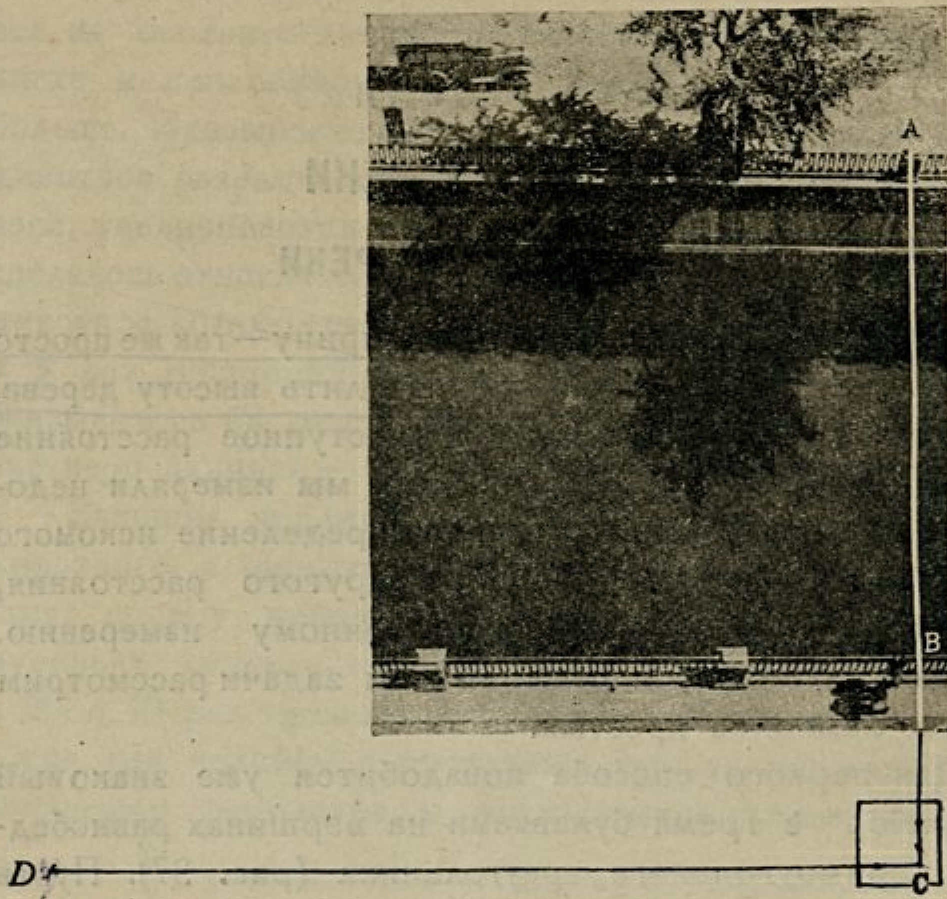
Не переплывая реки, измерить ее ширину—так же просто для знающего геометрию, как определить высоту дерева, не взбираясь на вершину. Неприступное расстояние измеряют теми же приемами, какими мы измеряли недоступную высоту. В обоих случаях определение искомого расстояния заменяется промером другого расстояния, легко поддающегося непосредственному измерению.

Из многих способов решения этой задачи рассмотрим несколько наиболее простых.

1) Для первого способа понадобится уже знакомый нам „прибор" с тремя булавками на вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 37). Пусть требуется определить ширину *AB* реки (рис. 38), стоя на том берегу, где точка *B*, и не перебираясь на противоположный. Став где-нибудь у точки *C*, держите булавочный прибор близ глаз так, чтобы, смотря одним глазом вдоль двух булавок, вы видели, как обе они покрывают точки *B* и *A*. Понятно, что, когда это вам удастся,

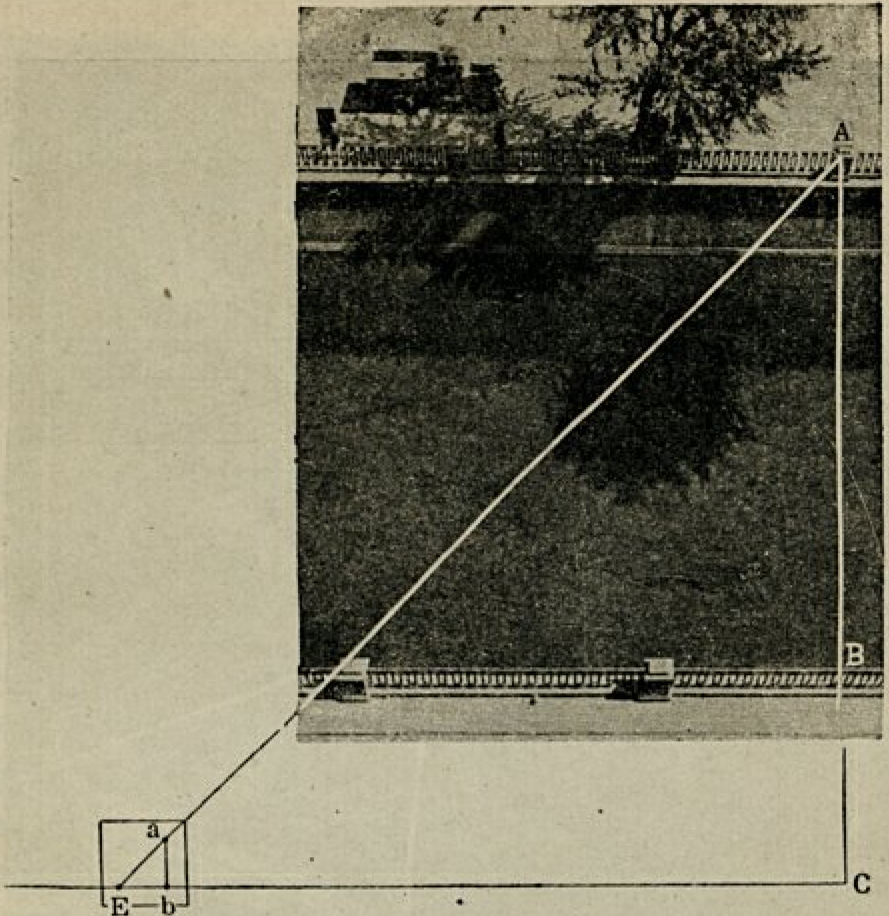


37



38

вы будете находиться как раз на продолжении прямой AB. Теперь, не двигая дощечки прибора, смотрите вдоль других двух булавок (перпендикулярно прежнему направлению) и заметьте какую-нибудь точку D, покрываемую этими булавками, т. е. лежащую на прямой, перпендикулярной к AC. После этого воткните в точку C веху, покиньте это место и идите с вашим инструментом вдоль прямой CD, пока не найдете на ней такую точку E (рис. 39), откуда можно одновременно покрыть для глаза булавкой b шест точки C, а булавкой a — точку A. Это будет значить, что вы отыскали на берегу третью вершину треугольника ACE, в котором угол C — прямой, а угол E — равен острому углу булавочного прибора, т. е. $\frac{1}{2}$ прямого. Очевидно, и угол A равен $\frac{1}{2}$ прямого,

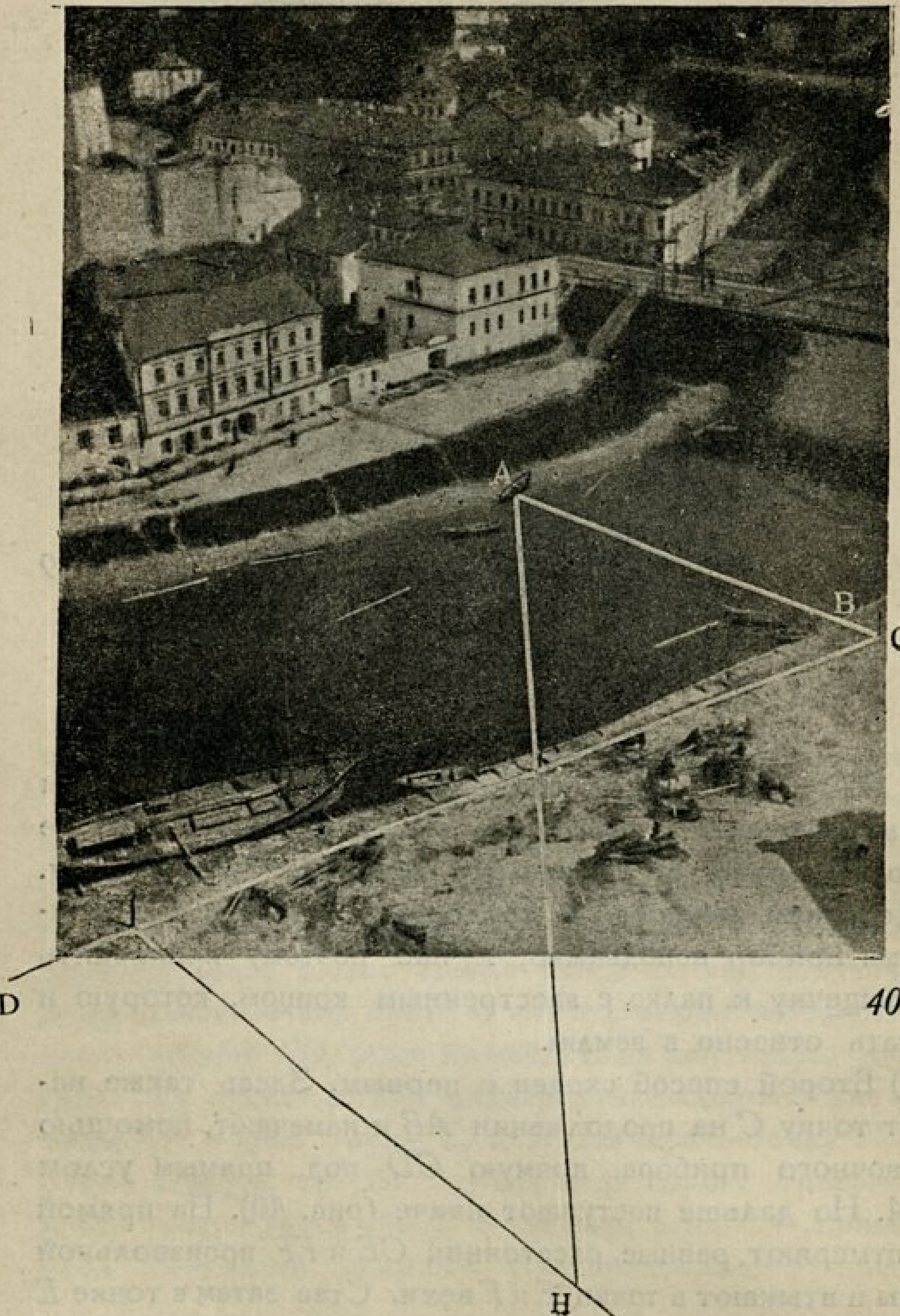


39

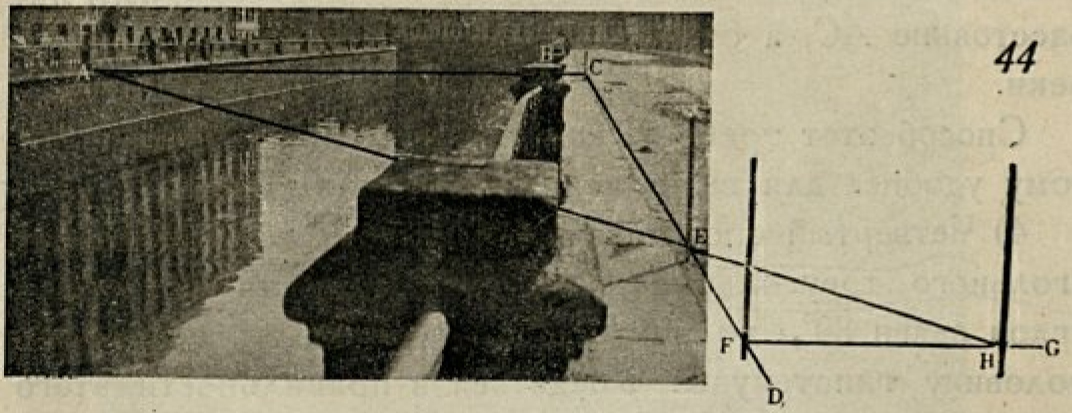
т. е. $AC = CE$. Если вы измерите расстояние CE хотя бы шагами, вы узнаете расстояние AC, а отняв BC, которое легко измерить, вы определите искомую ширину реки.

Довольно неудобно и трудно держать в руке булавочный прибор неподвижно; лучше поэтому прикрепить эту дощечку к палке с заостренным концом, которую и втыкать отвесно в землю.

2) Второй способ сходен с первым. Здесь также находят точку C на продолжении AB и намечают, помощью булавочного прибора, прямую CD под прямым углом к CA. Но дальше поступают иначе (рис. 40). На прямой CD отмеряют равные расстояния CE и EF произвольной длины и втыкают в точки E и F вехи. Став затем в точке E с булавочным прибором, намечают направление FG, пер-



40



44

пендикулярное к FC. Теперь, идя вдоль FG, отыскивают, на этой линии такую точку H, из которой веха E кажется покрывающей точку A. Это будет значить, что точки H, E и A лежат на одной прямой.

Задача решена: расстояние FH равно расстоянию AC, от которого достаточно лишь отнять BC, чтобы узнать, искомую ширину реки (читатель, конечно, сам догадается, почему FH равно AC).

Этот способ требует больше места, чем первый; если местность позволяет осуществить оба приема, полезно проверить один результат другим.

3) Описанный сейчас способ можно видоизменить: отмерить на прямой CF не равные расстояния, а одно в несколько раз меньше другого. Например (рис. 41), отмеряют FE в четыре раза меньше EC, а далее поступают попрежнему: по направлению FG, перпендикулярному к FC, отыскивают точку H, из которой веха E кажется покрывающей точку A. Но теперь уже FH не равно AC, а меньше этого расстояния в 4 раза: треугольники ACE и EFH здесь не равны, а подобны (имеют равные углы при неравных сторонах). Из подобия треугольников следует пропорция

$$AC:FH=CE:EF=4:1.$$

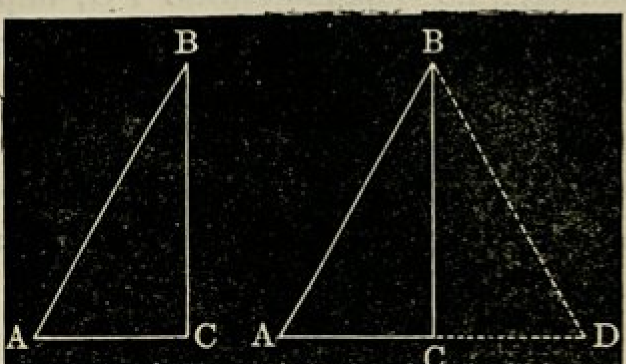
Значит, измерив FH и умножив результат на 4, получим расстояние AC, а отняв BC, узнаем и искомую ширину реки.

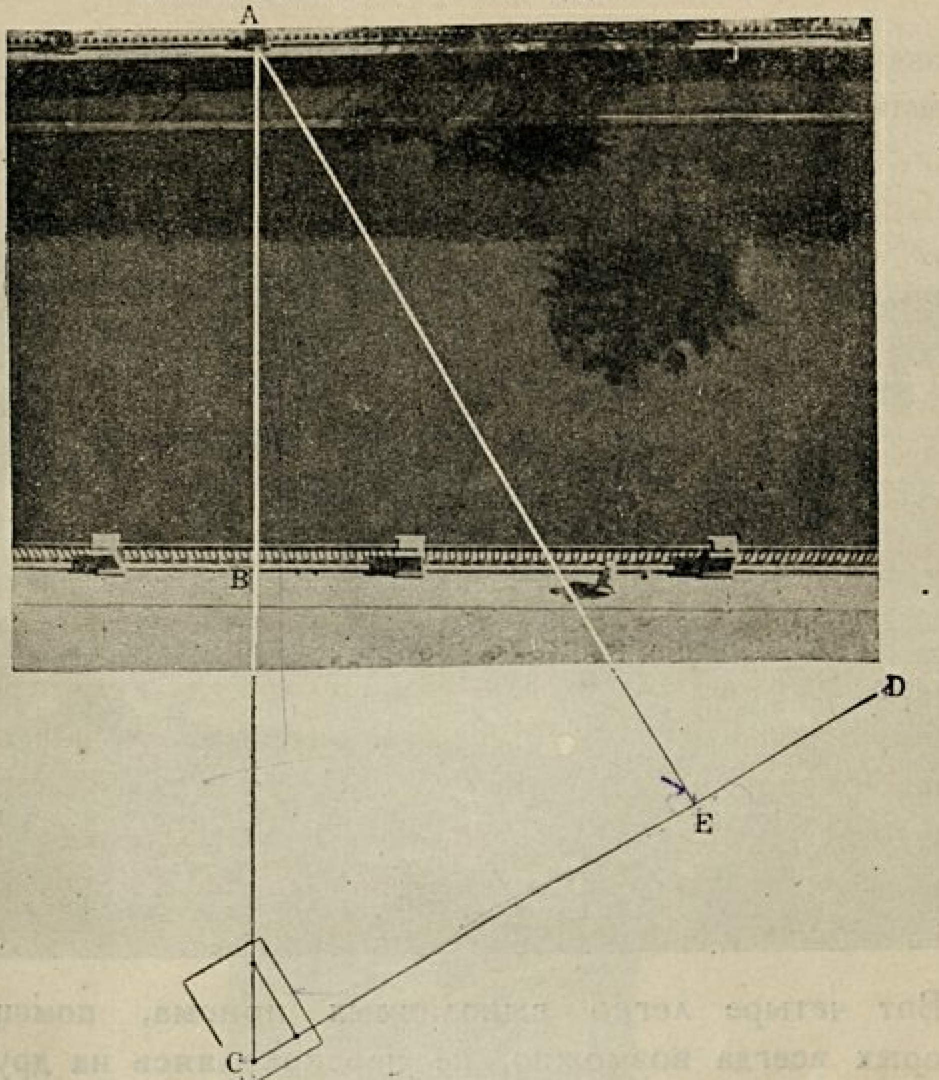
Способ этот требует, как видим, меньше места и потому удобнее для выполнения, чем предыдущий.

4) Четвертый способ основан на том свойстве прямоугольного треугольника, что если один из его острых углов равен 30°, то противолежащий катет составляет половину гипотенузы. Убедиться в правильности этого положения очень легко. Пусть угол B прямоугольного треугольника ABC (рис. 42 слева) равен 30°; докажем, что в таком случае $AC = \frac{1}{2}\ AB$. Повернем треугольник ABC вокруг BC так, чтобы он расположился симметрично своему первоначальному положению (рис. 42 справа), образовав фигуру ABD; линия ACD — прямая, потому что оба угла у точки C прямые. В треугольнике ABD угол $A = 60°$, угол ABD, как составленный из двух углов по 30°, тоже равен 60°. Значит, $AD = BD$, как стороны, лежащие против равных углов. Но $AC = \frac{1}{2}\ AD$; следовательно, $AC = \frac{1}{2} AB$

Желая воспользоваться этим свойством треугольника, мы должны расположить булавки на дощечке так, чтобы

42





43

основания их составляли прямоугольный треугольник, в котором катет вдвое меньше гипотенузы. С этим прибором мы помещаемся в точке *C* (рис. 43) так, чтобы направление *AC* совпадало с гипотенузой булавочного треугольника. Смотря вдоль короткого катета этого треугольника, намечают направление *CD* и отыскивают на нем такую точку *E*, чтобы направление *EA* было перпендикулярно к *CD* (это выполняется помощью того же булавочного прибора). Легко сообразить, что расстояние *CE* — катет, лежащий против угла 30°, — равно половине *AC*. Значит, измерив *CE*, удвоив это расстояние и отняв *BC*, получим искомую ширину *AB* реки.

44

Вот четыре легко выполнимых приема, помощью которых всегда возможно, не переправляясь на другой берег, измерить ширину реки с вполне удовлетворительной точностью. Других способов, требующих употребления более сложных приборов (хотя бы и самодельных), мы здесь рассматривать не будем.

ДЛИНА ОСТРОВА

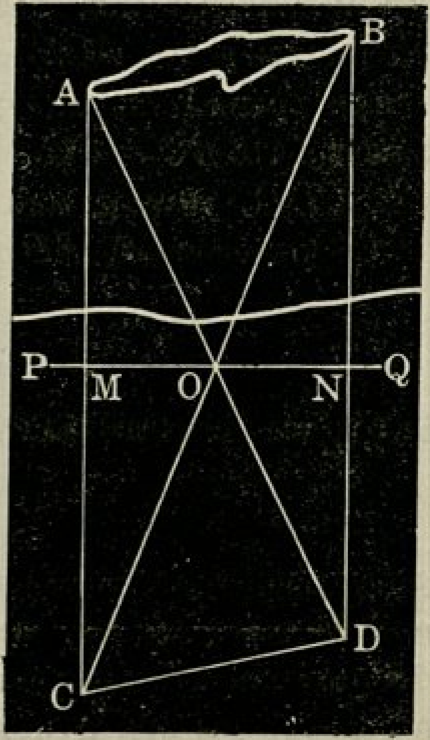
Задача № 12

Теперь нам предстоит задача более сложная. Стоя у реки или у озера, вы видите остров (см. рис. 44), длину которого желаете измерить, не покидая берега. Можно ли выполнить такое измерение?

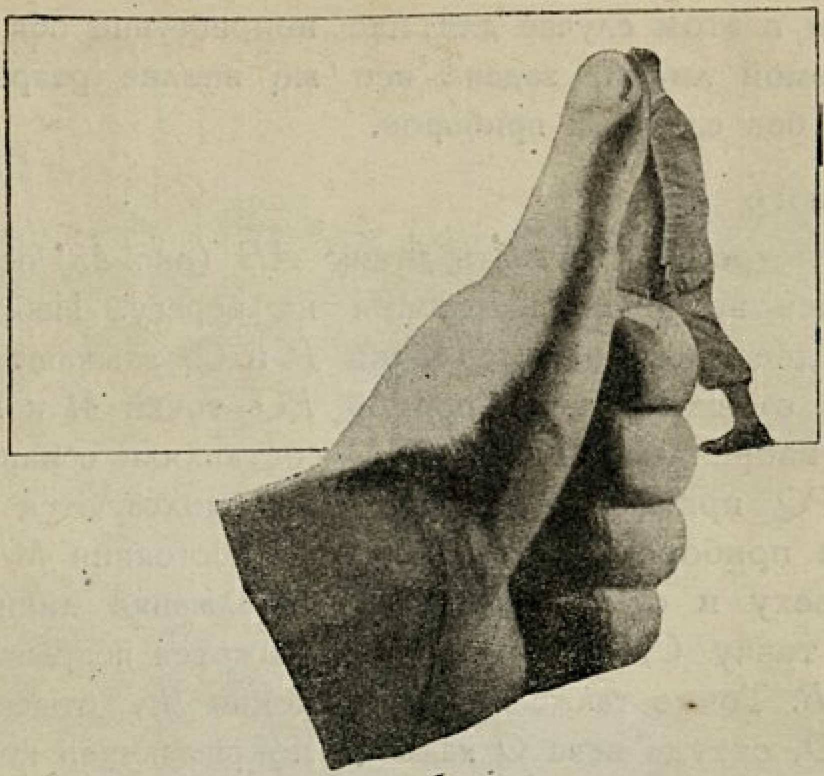
Хотя в этом случае для нас неприступны оба конца измеряемой линии, задача все же вполне разрешима, притом без сложных приборов.

Решение

Пусть требуется узнать длину *AB* (рис. 45) острова, оставаясь во время измерения на берегу. Избрав на берегу две произвольные точки *P* и *Q*, втыкают в них вехи и отыскивают на прямой *PQ* точки *M* и *N* так, чтобы направления *AM* и *BN* составляли с направлением *PQ* прямые углы (для этого пользуются булавочным прибором. В середине *O* расстояния *MN* втыкают веху и отыскивают на продолжении линии *AM* такую точку *C*, откуда веха *O* кажется покрывающей точку *B*. Точно также на продолжении *BN* отыскивают точку *D*, откуда веха *O* кажется покрывающей конец *A* острова. Расстояние *CD* и будет искомой длиной острова.



45



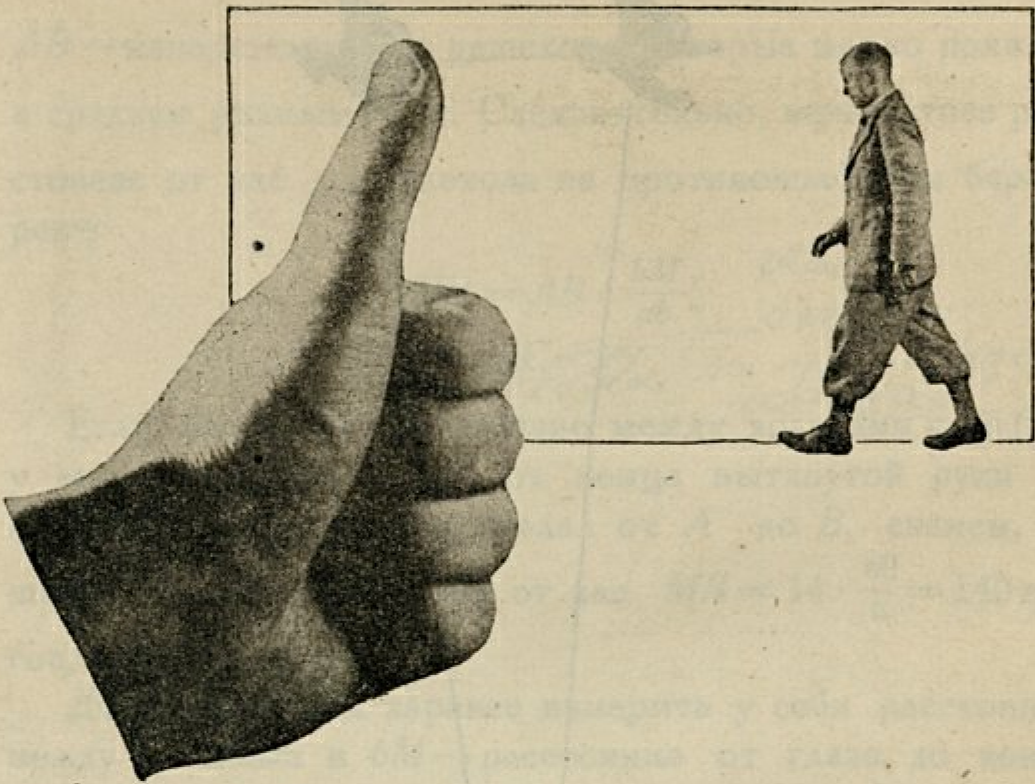
46

Доказать это не трудно. Рассмотрите прямоугольные треугольниики AMO и OND; в них катеты MO и NO равны, а кроме того равны углы AOM и NOD — следовательно, треугольники равны, и $AO = OD$. Сходным образом можно доказать, что $BO = OC$. Сравнивая затем треугольники ABO и COD, убеждаемся в их равенстве, а значит, и в равенстве расстояний AB и CD.

ПЕШЕХОД НА ДРУГОМ БЕРЕГУ

Задача № 13

По другому берегу реки идет человек. Вы отчетливо различаете его шаги. Можете ли вы, не сходя с места, определить, хотя бы приблизительно, расстояние от него до вас? Никаких приборов вы под рукою не имеете.

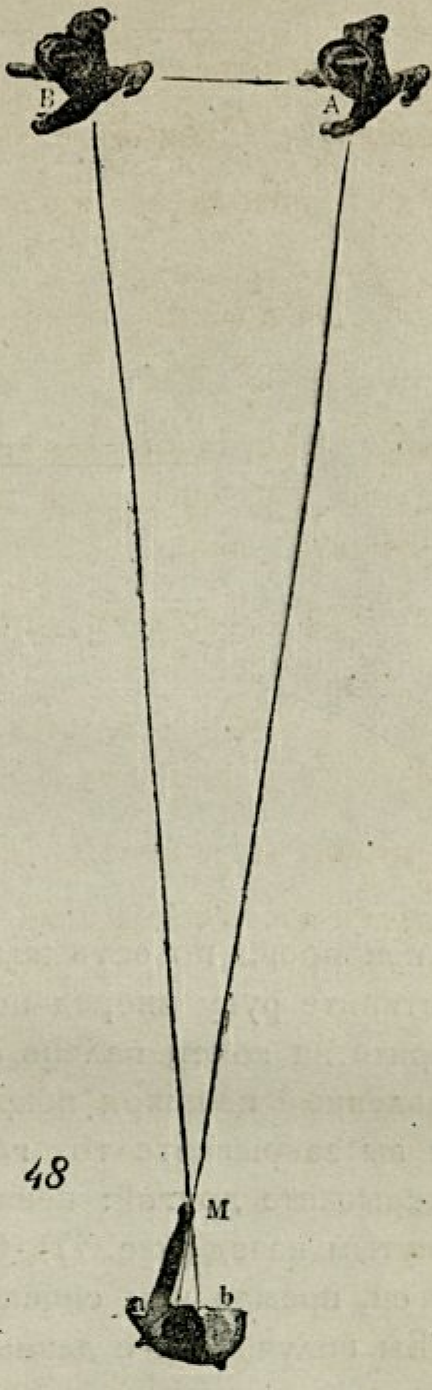


47

Решение

У вас нет приборов, но есть глаза и руки, — этого достаточно. Вытяните руку вперед по направлению к пешеходу и смотрите на конец пальца одним глазом, ожидая, когда отдаленный пешеход покроется им (рис. 46). В этот момент вы закрываете тот глаз, которым сейчас смотрели, и открываете другой: пешеход покажется вам словно отодвинутым назад (рис. 47). Сосчитайте, сколько шагов сделает он, прежде чем снова поровняется с вашим пальцем. Вы получите все данные, необходимые для приблизительного определения расстояния.

Объясним, как ими воспользоваться. Пусть на рис. 48 a и b — ваши глаза, точка M — конец пальца вытянутой руки. Точка A — первое положение пешехода, B — второе; Треугольники abM и ABM подобны (вы должны повернуться к пешеходу так, чтобы ab было приблизительно



48

параллельно направлению его движения). Значит, $BM:bM = AB:ab$, — пропорция, в которой неизвестен только один член BM, все же остальные можно определить непосредственно. Действительно: bM — длина вашей вытянутой руки; ab — расстояние между зрачками ваших глаз,

AB — измерено шагами пешехода, которые можно принять в среднем равными $\frac{3}{4}$ *м*. Следовательно, неизвестное расстояние от вас до пешехода на противоположном берегу реки:

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}.$$

шаг — $\frac{3}{4}$;
бег — 1,5 м;
ab — между зрачками; bM — от пров. глаза до конца.

Если, например, расстояние между зрачками глаз (ab) у вас 6 *см*, длина bM от конца вытянутой руки до глаза 60 *см*, а пешеход сделал от A до B, скажем, 14 шагов, то расстояние его от вас $MB = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140$ шагов, или 105 *м*.

Достаточно вам заранее измерить у себя расстояние между зрачками и bM — расстояние от глаза до конца вытянутой руки, чтобы, запомнив их отношение $\frac{bM}{ab}$, быстро определять отдаление недоступных предметов. Тогда останется лишь умножить AB на это отношение. В среднем у большинства людей $\frac{bM}{ab}$ равно 10, с небольшими колебаниями. Затруднение будет лишь в том, чтобы каким-нибудь образом определить расстояние AB. В нашем случае мы воспользовались шагами идущего вдали человека. Но можно привлечь к делу и иные указания. Если вы измеряете, например, расстояние от отдаленного товарного поезда, то длину AB можно оценить по сравнению с длиною товарного вагона, которая обычно известна (7,6 *м* между буферами). Если определяется расстояние от дома, то AB оценивают по сравнению с шириною окна, с длиною кирпича и т. п.

Тот же прием можно приложить и другим способом — для определения р а з м е р а отдаленного предмета, если

49

известно его расстояние. Для этой цели можно пользоваться и иными „дальномерами“, которые мы сейчас опишем.

ПРОСТЕЙШИЕ ДАЛЬНОМЕРЫ

В первой главе был описан самый простой прибор для определения недоступных высот — высотомер. Теперь опишем простейшее приспособление для измерения неприступных расстояний — „дальномер“. Простейший дальномер можно изготовить из обыкновенной спички. Для этого нужно лишь нанести на одной из ее граней миллиметровые деления, — для ясности попеременно светлые и черные (рис. 49).

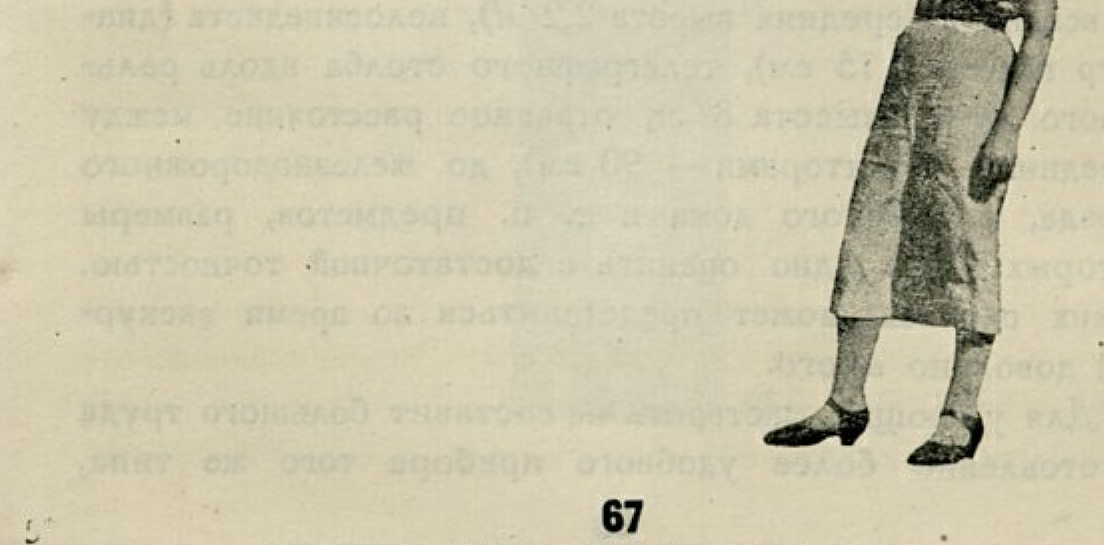
Пользоваться этим примитивным „дальномером“ для оценки расстояния до отдаленного предмета можно только в тех случаях, когда размеры этого предмета вам известны; впрочем, и всякого рода иными дальномерами, более совершенного устройства, можно пользоваться при том же условии. Предположим, вы видите вдали человека и ставите себе задачу — определить расстояние до него. Здесь спичка-дальномер может вас выручить. Держа ее в вытянутой руке (рис. 50) и глядя одним глазом, вы приводите свободный ее конец в совпадение с верхней частью отдаленной фигуры. Затем, медленно подвигая по спичке ноготь большого пальца, останавливаете его у той ее точки, которая проектируется на основании человеческой фигуры. Вам остается теперь только узнать, приблизив спичку к глазу, у которого деления остановился ноготь, — и тогда все данные для решения задачи у вас налицо.

Легко убедиться в правильности пропорции:

$$\frac{\text{искомое расстояние}}{\text{расст. от глаза до спички}} = \frac{\text{средн. рост человека}}{\text{измер. часть спички}}.$$

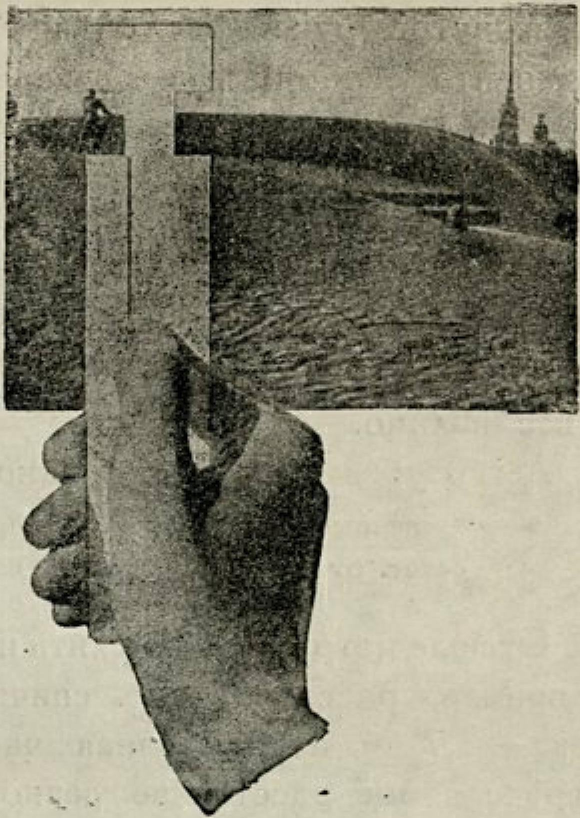
Отсюда нетрудно вычислить искомое расстояние. Если, например, расстояние до спички — 60 *см*, рост человека — 1,7 *м*, а измеренная часть спички — 12 *мм*, то определяемое расстояние равно

$$60 \cdot \frac{1\,700}{12} = 8\,500 \text{ см} = 85 \text{ м}.$$



50

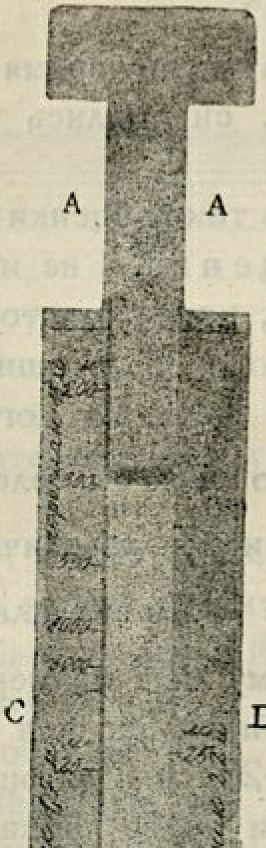
51



Чтобы приобрести некоторый навык в обращении этим дальномером, измерьте рост кого-либо из ваших товарищей и, попросив его отойти на некоторое расстояние, попытайтесь определить, на сколько шагов он от вас отошел.

Тем же приемом можете вы определить расстояние от всадника (средняя высота 2,2 *м*), велосипедиста (диаметр колеса — 75 *см*), телеграфного столба вдоль рельсового пути (высота 8 *м*, отвесное расстояние между соседними изоляторами — 90 *см*), до железнодорожного поезда, кирпичного дома и т. п. предметов, размеры которых не трудно оценить с достаточной точностью. Таких случаев может представиться во время экскурсий довольно много.

Для умеющих мастерить не составит большого труда изготовление более удобного прибора того же типа, предназначенного для оценки расстояний по величине отдаленной человеческой фигуры. Устройство его ясно из рис. 51—52. Наблюдаемый предмет помещают как раз в промежуток A, образующийся при поднятии выдвижной части приборчика. Величина промежутка удобно определяется по делениям на частях C и D дощечки. Чтобы избавить себя от необходимости делать какие-либо расчеты, можно на полоске C прямо нанести против деле-



52

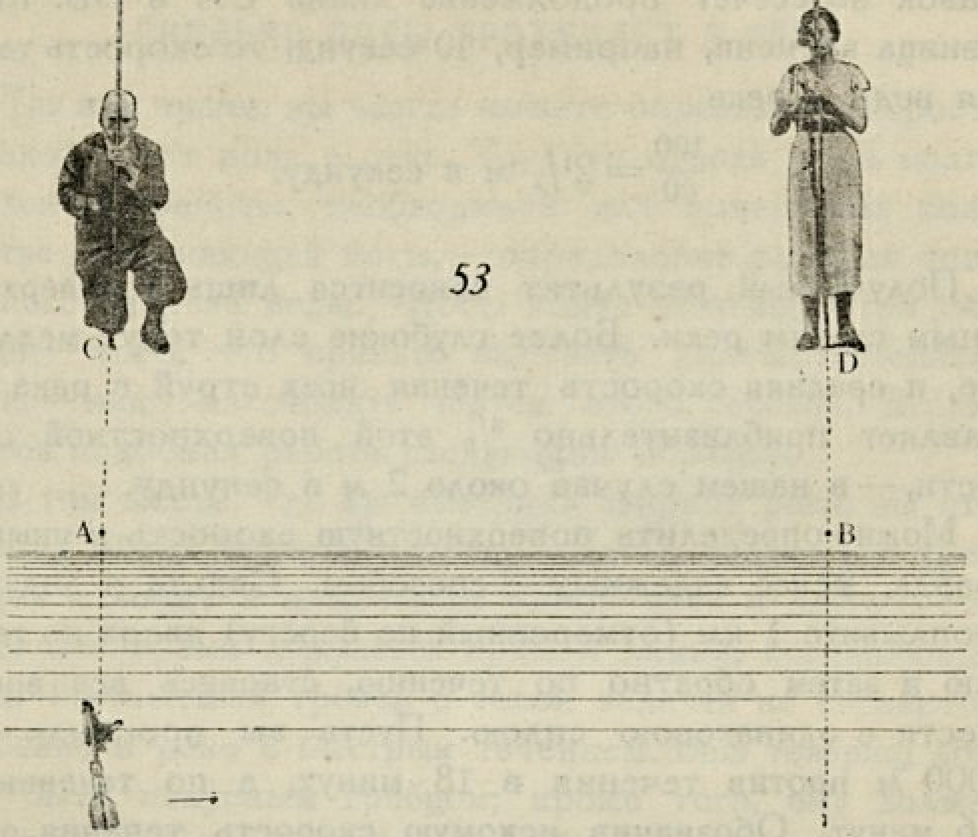
ний соответствующие им расстояния, если наблюдаемый предмет — человеческая фигура (прибор держат от глаза на расстоянии вытянутой руки). На правой полоске D можно нанести обозначения расстояний, заранее вычисленных для случая, когда наблюдается фигура всадника (2,2 *м*). Для телеграфного столба (высота 8 *м*), аэроплана с размахом крыльев 15 *м* и т. п. более крупных предметов можно использовать верхние, свободные части полосок C и D. Тогда прибор получит вид, представленный на рис. 52.

Германские солдаты во время империалистической войны 1914—1918 гг. снабжались дальномерами именно такой конструкции.

Конечно, точность такой оценки расстояния не велика. Это именно лишь о ц е н к а, а не измерение. В примере, рассмотренном ранее, когда расстояние до человеческой фигуры оценено было в 85 *м*, ошибка в 1 *мм* при измерении части спички дала бы погрешность результата в 7 *м* $\left(\frac{1}{12}\text{ от } 85\right)$. Но если бы человек отстоял вчетверо дальше, мы отмерили бы на спичке не 12, а 3 *мм* — и тогда ошибка даже в $\frac{1}{2}$ *мм* вызвала бы изменение результата на 57 *м*. Поэтому наш пример, в случае человеческой фигуры, надежен только для сравнительно близких расстояний — в 100—200 *м*. При оценке больших расстояний надо избирать и более крупные предметы.

СКОРОСТЬ ТЕЧЕНИЯ

Мало кто умеет точно ответить на вопрос: сколько воды протекает, например, в сутки даже в небольшой речке? Между тем, это вполне поддается измерению и



53

представляет сравнительно нетрудную геометрическую задачу.

Чтобы решить ее, нужно прежде всего измерить скорость течения воды в реке. Измерение выполняют несколько человек. Избирают прямой участок реки и ставят вдоль берега две вехи A и B, в расстоянии, например, 100 *м* одну от другой (рис. 53). На линиях, перпендикулярных к AB, ставят еще две вехи C и D. Один из участников измерения становится позади вехи C, другой — позади вехи D, и смотрят вдоль направлений CA и DB на поверхность воды. Третий участник бросает в воду выше точки A какой-нибудь хорошо заметный поплавок, например закупоренную полупустую бутылку с флажком. Наблюдатели, стоящие у вех с хорошо сверенными часами в руках, отмечают моменты, когда поплавок пересечет продолжение линий CA и DB. Если разница времени, например, 40 секунд, то скорость течения воды в реке

$$\frac{100}{40} = 2^1/_2 \text{ м в секунду.}$$

Полученный результат относится лишь к поверхностным струям реки. Более глубокие слои текут медленнее, и средняя скорость течения всех струй в реке составляет приблизительно $^5/_6$ этой поверхностной скорости, — в нашем случае около 2 *м* в секунду.

Можно определить поверхностную скорость и иным — правда, менее надежным — способом. Сядьте в лодку и проплывите 1 *км* (отмеренный по берегу) вверх по течению и затем обратно по течению, стараясь все время грести с одинаковою силою. Пусть вы проплыли эти 1000 *м* против течения в 18 минут, а по течению — в 6 минут. Обозначив искомую скорость течения реки через x, а скорость вашего движения в стоячей воде через y, вы составляете уравнения:

$$\frac{1000}{y-x} = 18; \qquad \frac{1000}{y+x} = 6,$$

откуда

$$y + x = \frac{1000}{6}$$

$$\underline{y - x = \frac{1000}{18}}$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

Скорость течения воды на поверхности равна 55 *м* в минуту, а, следовательно, средняя скорость — около $^5/_6$ *м* в секунду.

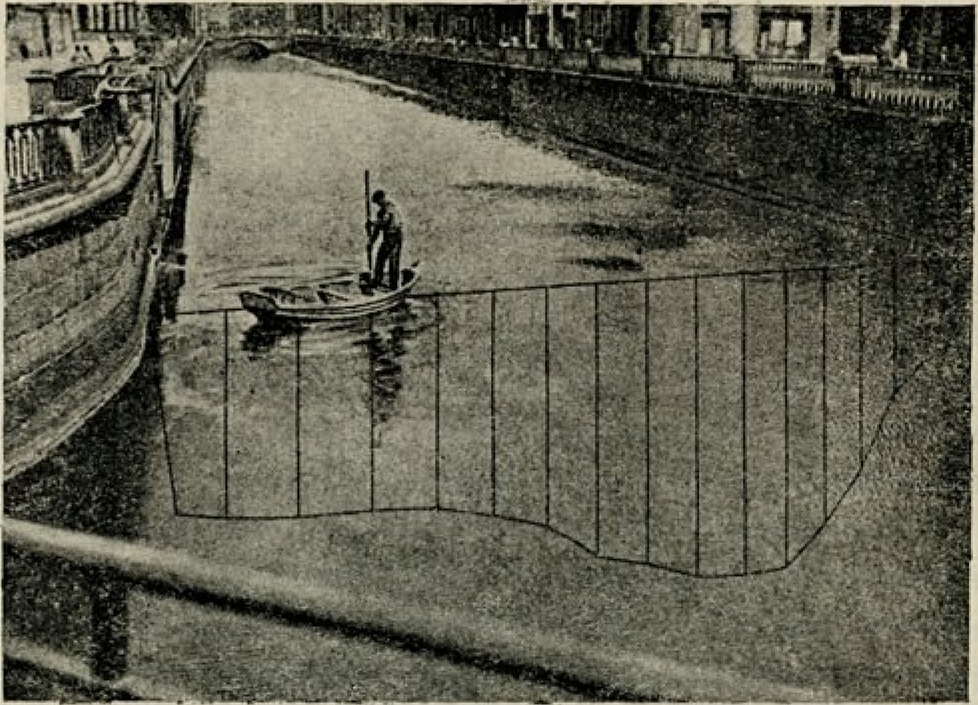
СКОЛЬКО ВОДЫ ПРОТЕКАЕТ В РЕКЕ

Так или иначе, вы всегда можете определить скорость, с какой течет вода в реке. Труднее вторая часть подготовленной работы, необходимой для вычисления количества протекающей воды, — определение площади поперечного разреза воды. Чтобы найти величину этой площади, — того, что принято называть „живым сечением“ реки, — надо изготовить чертеж этого сечения. Выполняется подобная работа следующим образом.

В том месте, где вы измерили ширину реки, вы ставите на обоих берегах по вехе. Затем садитесь с товарищем в лодку и плывете от одной вехи к другой, стараясь все время держаться прямой линии, соединяющей вехи. Неопытный гребец с такой задачей не справится, особенно в реке с быстрым течением. Ваш товарищ должен быть искусным гребцом; кроме того, ему должен помогать и третий участник работы, который, стоя на берегу, следит, чтобы лодка не сбивалась с надлежащего направления, и в нужных случаях дает гребцу сигналами указания, в какую сторону ему нужно повернуть. В первую переправу через речку вы должны сосчитать лишь, сколько ударов веслами она потребовала, и отсюда узнать, какое число ударов перемещает лодку на 5 или 10 *м*. Тогда вы совершаете второй переезд, вооружившись на этот раз достаточно длинным шестом с нанесенными на нем делениями, и каждые 5—10 *м* (отмеряемые по числу ударов веслами) погружаете шест отвесно до дна, записывая глубину речки в этом месте.

Таким способом можно промерить живое сечение только небольшой речки; для широкой, многоводной реки необходимы более сложные приемы; работа это выполняется специалистами. Любителю приходится избирать

54



себе задачу, отвечающую его скромным измерительным средствам.

Когда все измерения закончены, вы прежде всего набрасываете на бумагу чертеж поперечного профиля реки. У вас получится фигура в роде той, какая изображена на рис. 54. Площадь этой фигуры определить весьма несложно, так как она расчленяется на ряд трапеций, в которых вам известны оба основания и высота, и на два краевых треугольника также с известными основанием и высотой.

Теперь вы располагаете уже всеми данными для расчета количества протекающей воды. Очевидно, через живое сечение реки протекает каждую секунду объем воды, равный объему призмы, основанием которой служит это сечение, а высотой — средняя секундная скорость течения. Если, например, средняя скорость течения воды в речке 1,5 *м* в секунду, а площадь живого сечения, скажем равна 126 *кв. м* то ежесекундно через это сечение переносится

$$126 \times 1{,}5 = 190 \text{ куб. м воды,}$$

или столько же тонн.[1] Это составляет в час

$$190 \times 3\,600 = 680\,000 \text{ куб. м,}$$

а в сутки

$$680\,000 \times 24 = 16\,000\,000 \text{ куб. м,}$$

около 16 миллионов *куб. м*, — почти в сто раз больше, чем подает за то же время ленинградский водопровод, питающий три миллиона жителей. В год мимо вас проносится в такой же речке около 6 *куб. км* воды — содержимое исполинского бака в километр ширины, километр глубины и шесть километров длины. А ведь река с живым сечением 126 *кв. м.* — не так уж велика: она может иметь, скажем, 6 *м* глубины и 21 *м* ширины. Сколько же воды протекает за год в такой реке, как Нева, через живое сечение которой ежесекундно проносится 3300 *куб. м* воды!

Заметим, что количество воды, ежесекундно протекающей через поперечное сечение реки, называется „расходом" воды в этой реке. Средний „расход" воды в Днепре у Киева — 700 *куб. м*; в Неве у Ленинграда, как сейчас было сказано, 3300 *куб. м*; в реке Москве, в пределах города, вследствие необычайно медленного течения (только $1^1/_2$ *мм* в секунду) — менее 9 *куб. м*.

РАДУЖНАЯ ПЛЕНКА

На реке, в которую спускается вода от завода, можно заметить нередко близ стока красивые цветные переливы. Масло (например, машинное), стекающее на реку вместе

[1] 1 *куб. м* пресной воды весит 1 *т* (1 000 *кг*).

55

с водою завода, остается на поверхности, как более легкое, и растекается чрезвычайно тонким слоем (рис. 55). Можно ли измерить или хотя бы приблизительно оценить толщину такой пленки?

Задача кажется замысловатой; однако решить ее не особенно трудно. Вы уже догадываетесь, что мы не станем заниматься таким безнадежным делом, как непосредственное измерение толщины пленки. Мы измерим ее косвенным путем, короче сказать — вычислим.

Возьмите определенное количество машинного масла, например 20 *г*, и вылейте на воду, подальше от берега (с лодки). Когда масло растечется по воде в форме более или менее ясно очерченного круглого пятна, измерьте хотя бы приблизительно диаметр этого круга. Зная диаметр, вычислите площадь. А так как вам известен и объем взятого масла (его легко вычислить по весу), то уже сама собою определится отсюда искомая толщина пленки. Рассмотрим пример.

Задача № 14

Один грамм керосина, растекаясь по воде, покрывает круг поперечником в 30 *см*. Какова толщина керосиновой пленки на воде? Куб. сантиметр керосина весит 0,8 *г*.

Решение

Найдем объем пленки, который, конечно, равен объему взятого керосина. Если один кубический сантиметр керосина весит 0,8 *г*, то на 1 *г* идет $\frac{1}{0,8} = 1,25$ *см*, 1250 *куб. мм*. Площадь круга с диаметром 30 *см*, или 300 *мм*, равна 70 000 *кв. мм*. Искомая толщина пленки равна объему, деленному на площадь основания:

$$\frac{1\,250}{70\,000} = 0,018 \text{ мм},$$

т. е. менее 50-й доли миллиметра. Прямое измерение подобной толщины обычными средствами, конечно, невозможно.

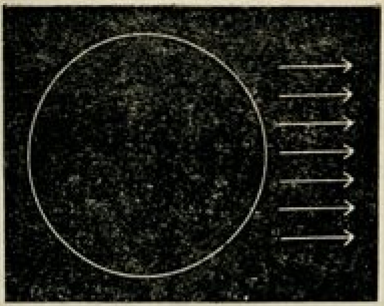
Масляные и мыльные пленки растекаются еще более тонкими слоями, достигающими 0,0001 *мм* и менее. „Однажды, — рассказывает английский физик Бойз в известной книге „Мыльные пузыри“, — я проделал такой опыт на пруде. На поверхность воды была вылита ложка оливкового масла. Сейчас же образовалось большое пятно, метров 20 — 30 в поперечнике. Так как пятно было в тысячу раз больше в длину и в тысячу раз больше в ширину, чем ложка, то толщина слоя масла на поверхности воды должна была приблизительно составлять миллионную часть толщины слоя масла в ложке, или около 0,000002 миллиметра".

КРУГИ НА ВОДЕ

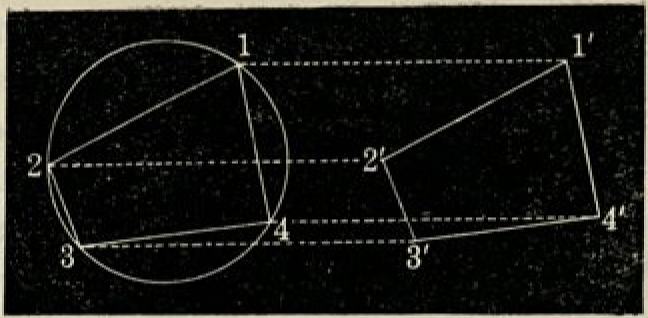
Задача № 15

Вы не раз, конечно, с любопытством рассматривали те круги, которые порождает брошенный в спокойную воду камень. И вас, без сомнения, никогда не затрудняло объяснение этого поучительного явления природы: волнение распространяется от начальной точки во все стороны с одинаковой скоростью; поэтому в каждый момент все волнующиеся точки должны быть расположены на

56



57



58

одинаковом расстоянии от места возникновения волнения, т. е. на окружности.

Но как обстоит дело в воде текучей? Должны ли волны от камня, брошенного в воду быстрой реки, тоже иметь форму круга, или же форма их будет вытянутая?

На первый взгляд может показаться, что в текучей воде круговые волны должны вытянуться в ту сторону, куда увлекает их течение: волнение передается по течению быстрее, чем против течения и в боковых направлениях. Поэтому волнующиеся части водной поверхности должны, казалось бы, расположиться по некоторой вытянутой замкнутой кривой, — во всяком случае, не по окружности.

В действительности, однако, это не так. Бросая камни в самую быструю речку, вы можете убедиться, что волны получаются строго круговые — совершенно такие же, как и в стоячей воде. Почему?

Решение

Будем рассуждать так. Если бы вода не текла, волны были бы круговые. Какое же изменение вносит течение? Оно увлекает каждую точку этой круговой волны в направлении, указанном стрелками (рис. 57), причем все точки переносятся по параллельным прямым с одинаковой скоростью, т. е. на одинаковые расстояния. А „параллельное перенесение“ не изменяет формы фигуры. Действительно, в результате такого перенесения точка 1 (рис. 58) окажется в точке $1'$, точка 2 — в точке $2'$ и т. д.; четыреугольник 1234 заменится четыреугольником $1'2'3'4'$, который равен ему, как легко усмотреть из образовавшихся параллелограммов $122'1'$, $233'2'$, $344'3'$ и т. д. Взяв на окружности не четыре, а больше точек, мы также получили бы равные многоугольники; наконец взяв бесконечно много точек, т. е. окружность, мы получили бы, после параллельного пересечения, равную окружность.

Вот почему переносное движение воды не изменяет формы волн, — они и в текучей воде остаются кругами. Разница лишь в том, что на поверхности озера круги не перемещаются (если не считать того, что они расходятся от своего неподвижного центра); на поверхности же реки круги движутся вместе со своим центром со скоростью течения воды.

ФАНТАСТИЧЕСКАЯ ШРАПНЕЛЬ

Задача № 16

Займемся задачей, которая как будто не имеет сюда отношения, на самом же деле, как увидим, тесно примыкает к рассматриваемой теме.

Вообразите шрапнельный снаряд, летящий высоко в воздухе. Вот он начал опускаться и вдруг разорвался; осколки разлетаются в разные стороны. Пусть все они брошены взрывом с одинаковой силою и несутся, не встречая помехи со стороны воздуха. Спрашивается: как расположатся осколки спустя секунду после взрыва, если за это время они еще не успеют достичь земли?

Решение

Задача похожа на задачу о кругах на воде. И здесь кажется, будто осколки должны расположиться некоторой фигурой, вытянутой вниз, в направлении падения: ведь осколки, брошенные вверх, летят медленнее, чем брошенные вниз. Нетрудно, однако, доказать, что осколки нашей воображаемой шрапнели должны расположиться на поверхности шара. Представьте на мгновение, что тяжести нет; тогда, разумеется, все осколки в течение секунды отлетят от места взрыва на строго одинаковое расстояние, т. е. расположатся на шаровой поверхности. Введем теперь в действие силу тяжести. Под ее влиянием осколки должны опускаться; но так как все тела, мы знаем, падают с одинаковой скоростью,[1] то и осколки должны в течение секунды опуститься на одинаковое расстояние, притом по параллельным прямым. Но такое параллельное перемещение не меняет формы фигуры, — шар остается шаром.

Итак, осколки фантастической шрапнели должны образовать шар, который, словно раздуваясь, опускается вниз со скоростью свободно падающего тела.

КИЛЕВАЯ ВОЛНА

Вернемся к реке. Стоя на мосту, обратите внимание на след, оставляемый быстро идущим судном. Вы увидите, как от носовой части расходятся под углом два водяных гребня.

---

[1] Различия обусловливаются сопротивлением воздуха, которое мы в нашей задаче исключили.

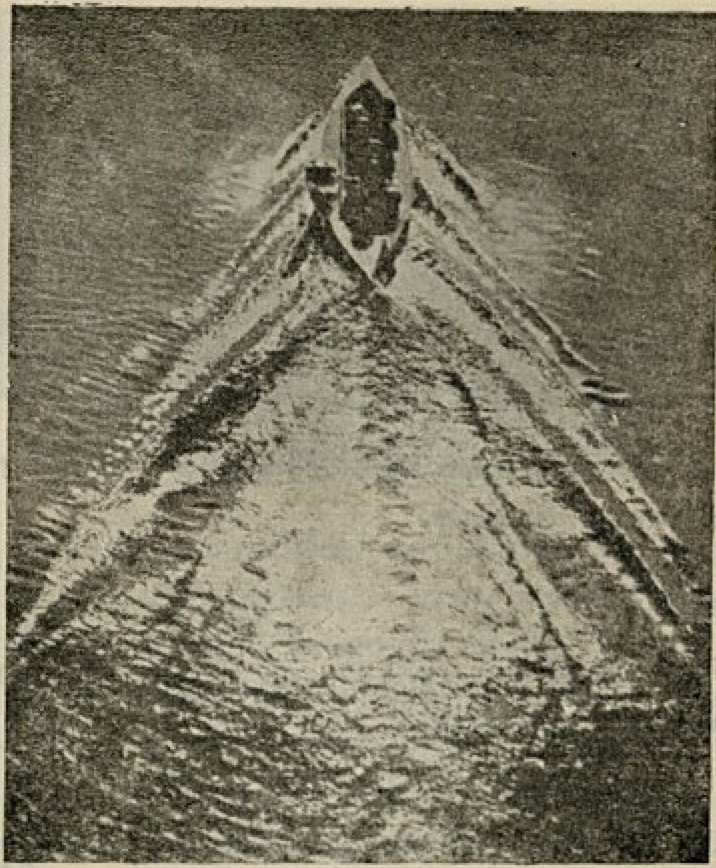
Откуда они берутся? И почему угол между ними тем острее, чем быстрее идет судно (рис. 59)?

Причина возникновения этих гребней хорошо объяснена немецким физиком Махом в его „Популярных очерках".

„Представьте себе, что вы бросаете в воду камешки через одинаковые промежутки времени и при том так, что места, куда вы попадаете, расположены на прямой линии в равных расстояниях одно от другого. Образуются круги, все менее и менее широкие, и все круги в совокупности порождают подобие волны у носа корабля. Чем камешки мельче и чем чаще их бросают, тем сходство заметнее. Погрузив в воду палку и ведя ею по поверхности воды, вы как бы заменяете прерывистое падение камешков непрерывным,—и тогда вы видите как раз такую волну, какая возникает у носа корабля".

К этой наглядной картине остается прибавить не много, чтобы довести ее до полной отчетливости. Врезаясь в воду, нос корабля каждое мгновение порождает такую же круговую волну, как и брошенный камень. Круг расширяется во все стороны, но тем временем судно успевает продвинуться вперед и породить вторую круговую волну, за которой тотчас же следует третья, и т. д. Получается картина, представленная на рис. 60. Встречаясь между собою, гребни соседних волн разбивают друг друга; остаются нетронутыми только те два небольших участка полной окружности, которые находятся на их наружных частях. Эти наружные участки, сливаясь, образуют два сплошных гребня, имеющих положение внешних касательных ко всем круговым волнам (рис. 61).

Таково происхождение тех водяных гребней, которые видны позади судна, позади всякого вообще тела,



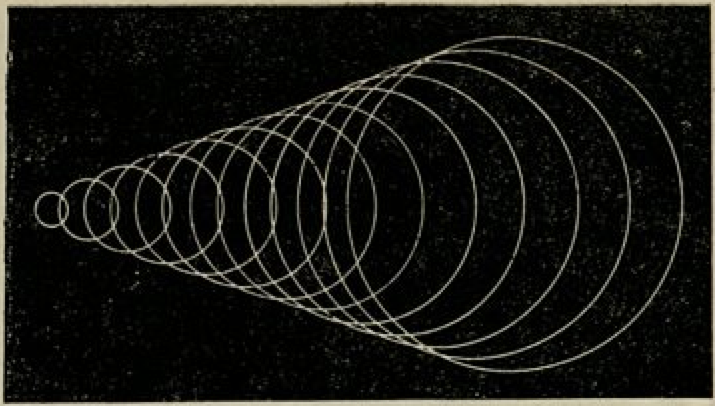
59

движущегося с достаточной быстротой по поверхности воды.

Отсюда прямо следует, что явление это возможно только тогда, когда тело движется быстрее, чем бегут водяные волны. Если вы проведете палкой по воде медленно, то не увидите гребней: круговые волны расположатся одна внутри другой, и общей касательной провести к ним нельзя будет.

Расходящиеся гребни можно наблюдать и в том случае, когда тело стоит на месте, а вода протекает мимо него. Если течение реки достаточно быстро, то подобные гребни образуются в воде, обтекающей мостовые устои. Форма волн получается здесь даже более отчетливая, чем, например, от парохода, так как правильность их не нарушается работою винта.

60



Выяснив геометрическую сторону дела, попробуем разрешить такую задачу.

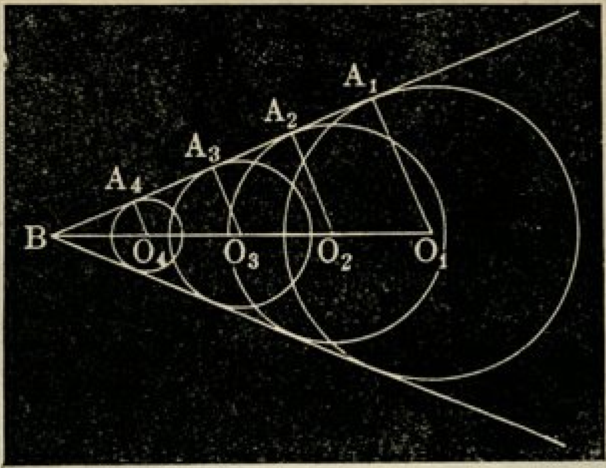
Задача № 17

От чего зависит величина угла между обеими ветвями килевой волны парохода?

Решение

Проведем из центра круговых волн (рис. 61) радиусы к соответствующим участкам прямолинейного гребня, т. е. к точкам общей касательной. Легко сообразить, что O_1B есть путь, пройденный за некоторое время носовой частью корабля, а O_1A_1 — расстояние, на которое за то же время распространится волнение. Отношение $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ есть синус угла O_1BA_1, в то же время это есть отношение скоростей волнения и корабля. Значит, угол B между гребнями килевой волны — не что иное, как удвоенный угол, синус которого равен отношению скорости бега круговых волн к скорости судна.

Скорость распространения круговых волн в воде приблизительно одинакова для всех судов; поэтому угол расхождения ветвей килевой волны зависит, главным образом, от скорости корабля: синус половины угла



61

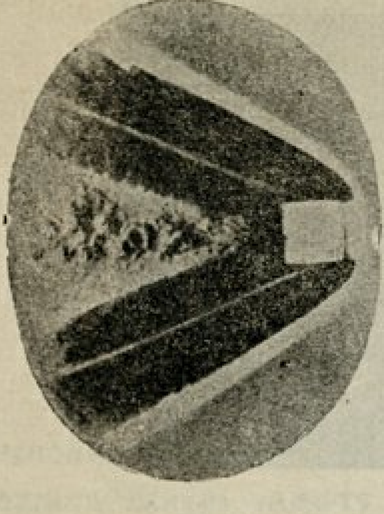
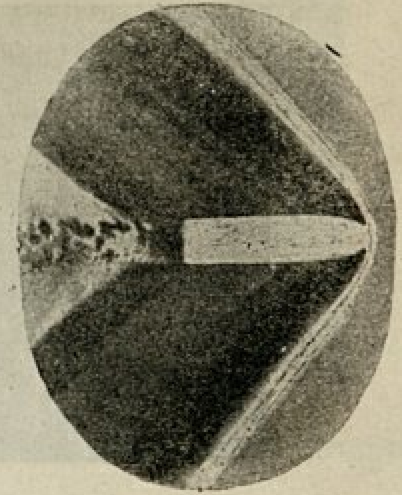
обычно пропорционален этой скорости. И, наоборот, по величине угла можно судить о том, во сколько раз скорость парохода больше скорости волн. Если, например угол между ветвями килевой волны 30°, — как у большинства морских грузо-пассажирских судов, — то синус его половины (sin 15°) равен 0,26; это значит, что скорость парохода больше скорости бега круговых волн в $\frac{1}{0,26}$, т. е. примерно в 4 раза.

СКОРОСТЬ ПУШЕЧНЫХ СНАРЯДОВ

Задача № 18

Волны, наподобие сейчас рассмотренных, порождаются в воздухе летящею пулею или артиллерийским снарядом.

Существуют способы фотографировать снаряд налету; на рис. 62 и 63 воспроизводятся два таких изображения снарядов, движущихся не одинаково быстро. На обоих рисунках отчетливо видна интересующая нас „головная волна“ (как ее в этом случае называют). Происхождение ее такое же, как и килевой волны парохода. И здесь применимы те же геометрические отношения; а именно: синус половины угла расхождения головных

62   63

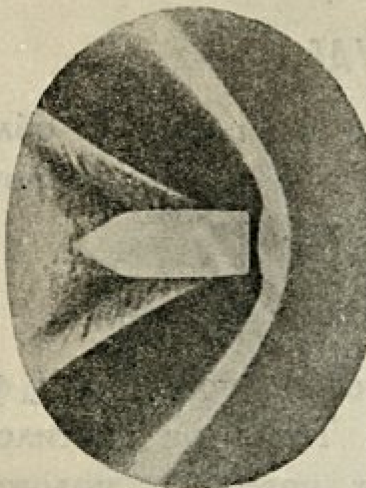
волн равен отношению скорости распространения волнения в воздухе к скорости полета самого снаряда. Но волнение в воздушной среде передается со скоростью, близкой к скорости звука, т. е. 330 *м* в секунду. Легко поэтому, располагая снимком летящего снаряда, определить приблизительно его скорость. Как сделать это для приложенных здесь двух изображений?

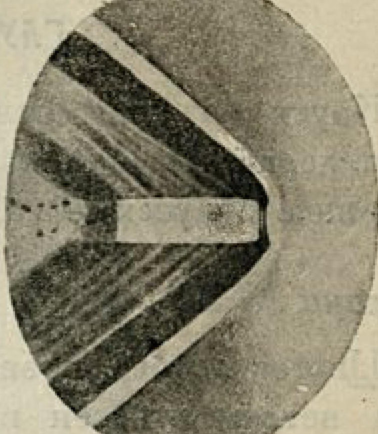
Решение

Измерим угол расхождения ветвей головной волны на рис. 62 и 63. В первом случае он заключает около 62°, во втором — примерно 102°. Половина их — 31° и 51°. Sin 31° = 0,52; sin 51° = 0,78. Следовательно, скорость распространения воздушной волны, т. е. 330 *м*, составляет в первом случае 0,52 скорости полета снаряда, во втором — 0,78. Отсюда скорость первого снаряда $= \frac{330}{0,52} = 630$ *м*, второго $= \frac{330}{0,78} = 420$ *м* в секунду.

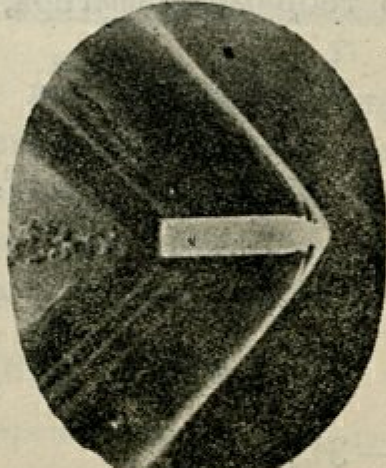
Вы видите, что довольно простые геометрические соображения, при некоторой поддержке со стороны физики, помогли нам разрешить задачу на первый взгляд очень замысловатую: по фотографии летящего снаряда определить его скорость в момент фотографирования. (Расчет этот, однако, лишь приблизительно верен, так как здесь не принимаются в соображение некоторые второстепенные обстоятельства).

64





65



66

Задача № 19

Для желающих самостоятельно выполнить подобное вычисление скорости полета ядер на стр. 87 даются три воспроизведения снимков снарядов, летящих с различною скоростью (рис. 64, 65, 66).

ГЛУБИНА ПРУДА

Круги на воде отвлекли нас на время в область артиллерии. Вернемся же снова к реке и рассмотрим древнюю индусскую задачу о лотосе.

Задача № 20

Цветок лотоса, возвышающийся над водой на $^1/_2$ фута, был ветром отнесен в сторону. Тогда он очутился на поверхности воды в 2 футах от прежнего положения. Определить по этим данным глубину пруда.

Решение

Обозначим (рис. 67) искомую глубину CD пруда через x. Тогда, по теореме Пифагора, имеем:

$$\overline{BD}^2 = x^2 + \overline{BC}^2,$$

то-есть:

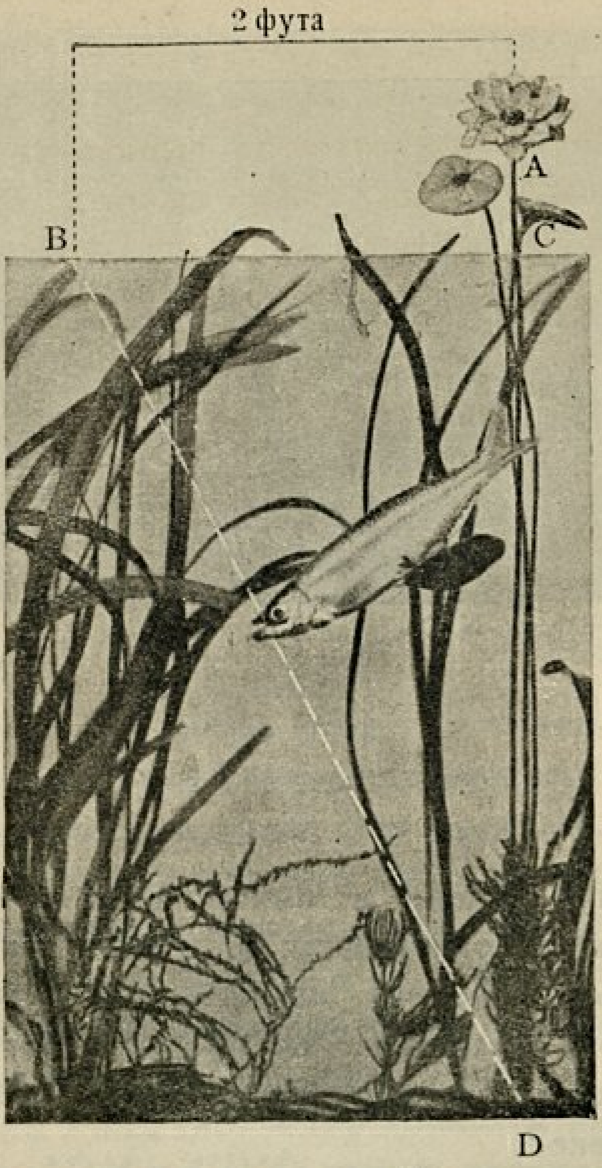
$$x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2^2,$$

откуда

$$x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 4,$$

$$x = 3\frac{3}{4}.$$

Искомая глубина — $3^3/_4$ фута.

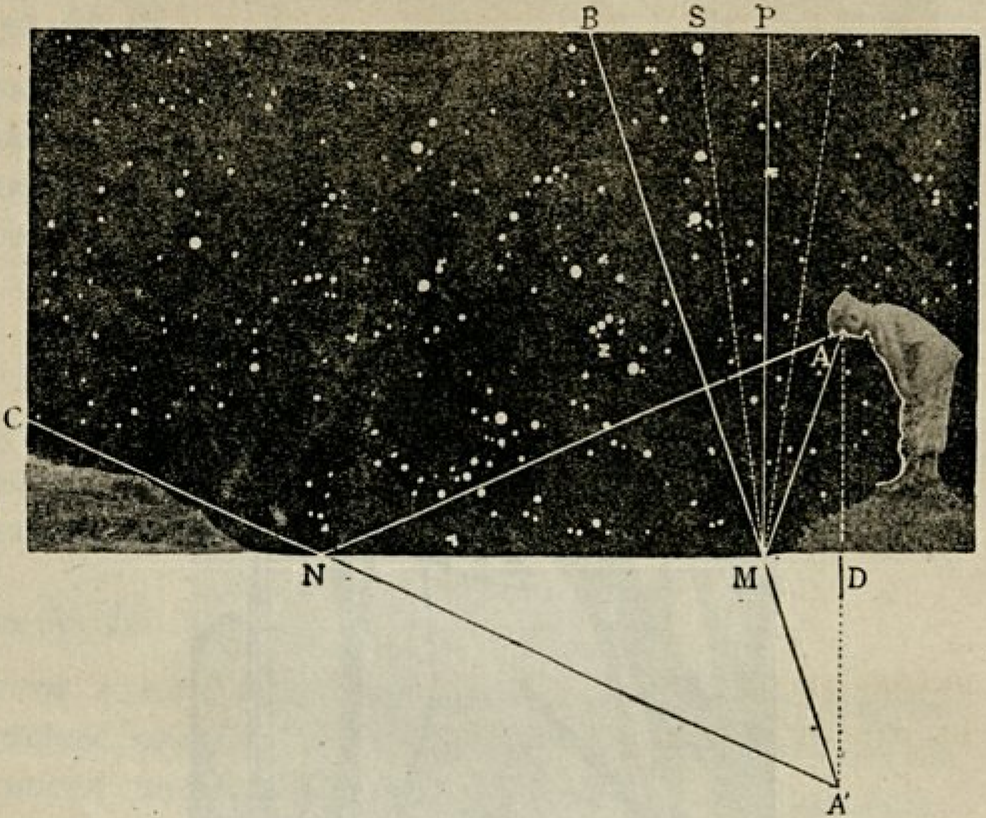


67

Близ берега реки или неглубокого пруда вы можете отыскать водяное растение, которое доставит вам реальный материал для подобной задачи: без всяких приспособлений, не замочив даже рук, определить глубину водоема в этом месте.

ЗВЕЗДНОЕ НЕБО В РЕКЕ

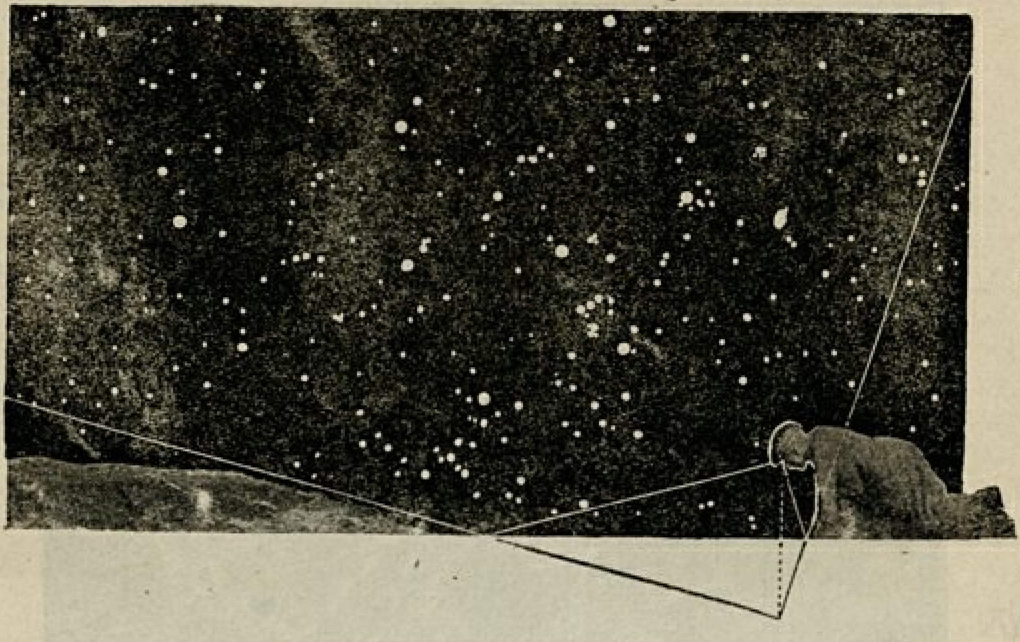
Река и в ночное время предлагает геометру задачи. Помните у Гоголя в описании Днепра: „Звезды горят и светят над миром и все разом отдаются в Днепре.



68

Всех их держит Днепр в темном лоне своем: ни одна не убежит от него, разве погаснет в небе". В самом деле, когда стоишь на берегу широкой реки, кажется, что в водном зеркале отражается целиком весь звездный купол. Но так ли в действительности? Все ли звезды отдаются в реке?

Сделаем чертеж (рис. 68): A — глаз наблюдателя, стоящего на берегу реки, у края обрыва, MN — поверхность воды. Какие звезды может видеть в воде наблюдатель из точки A? Чтобы ответить на этот вопрос, опустим из точки A перпендикуляр AD на прямую MN и продолжим его на равное расстояние, до точки A'. Если бы глаз наблюдателя находился в A', он мог бы видеть только ту часть звездного неба, которая помещается внутри угла $BA'C$. Таково же и поле зрения действительного наблюдателя, смотрящего из точки A. Звезды,



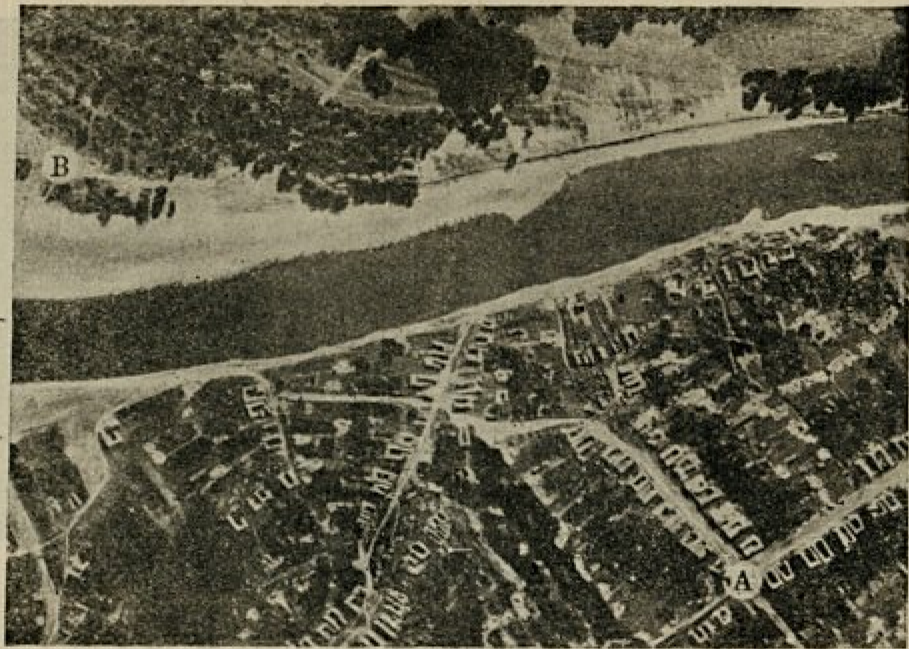
69

находящиеся вне этого угла, не видны наблюдателю; их отраженные лучи проходят мимо его глаз.

Как убедиться в этом? Как доказать, что, например, звезда S, лежащая вне угла $BA'C$, не видна нашему наблюдателю в водном зеркале реки? Проследим за ее лучом, падающим близко к берегу, в точку M; он отразится, по законам физики, под таким углом к перпендикуляру MP, который равен углу падения SMP и, следовательно, меньше угла PMA (это легко доказать из равенства треугольников ADM и $A'DM$); значит, отраженный луч должен пройти мимо A. Тем более пройдут мимо глаз наблюдателя лучи звезды S, отразившиеся в точках, расположенных дальше точки M.

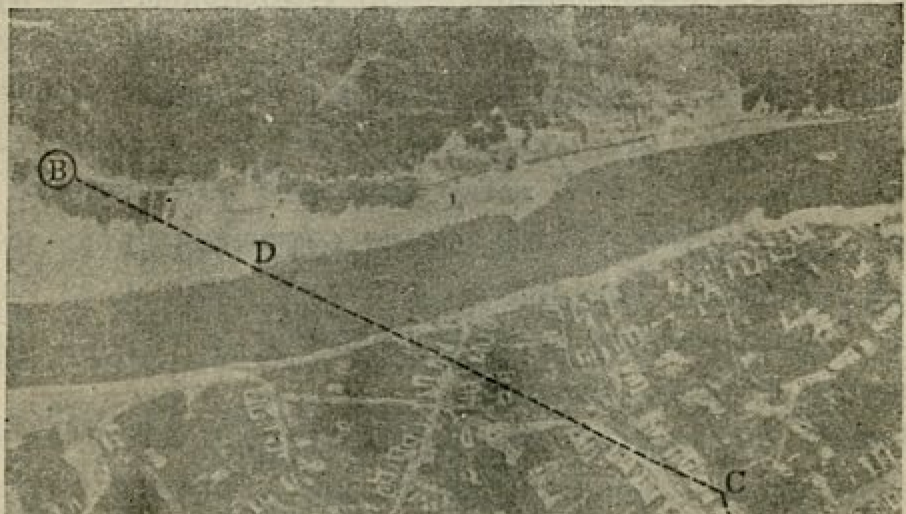
Значит, гоголевское описание содержит преувеличение: в Днепре отражаются далеко не все звезды, а, во всяком случае, меньше половины звездного неба.

Всего любопытнее, что обширность отраженной части неба вовсе не доказывает, что перед вами широкая река. В узенькой речке с низкими берегами вы можете видеть

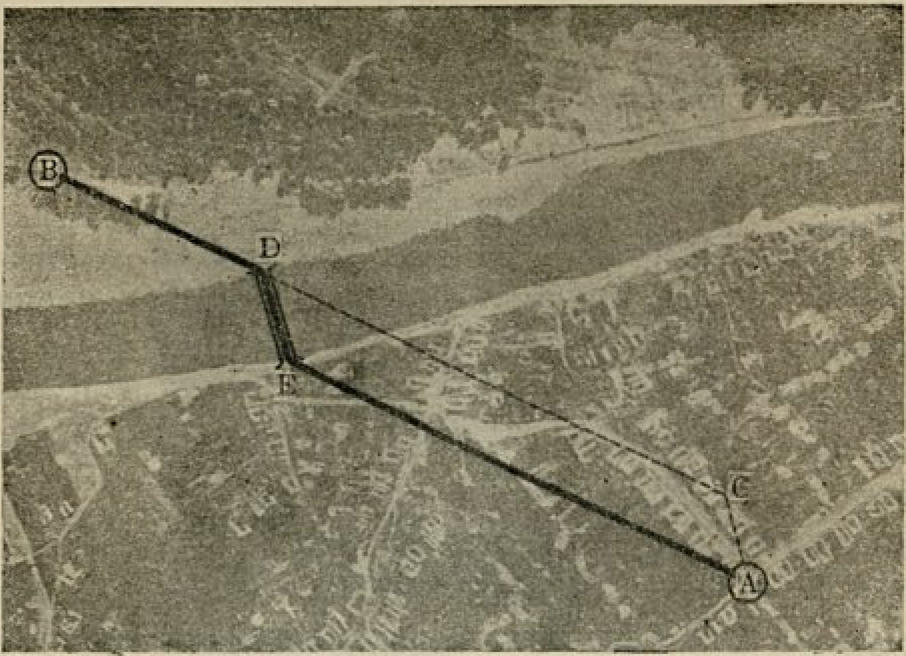


70

почти половину неба (т. е. больше, чем в широкой реке), если наклонитесь близко к воде. Легко удостовериться в этом, сделав для такого случая построение поля зрения (рис. 69).



71

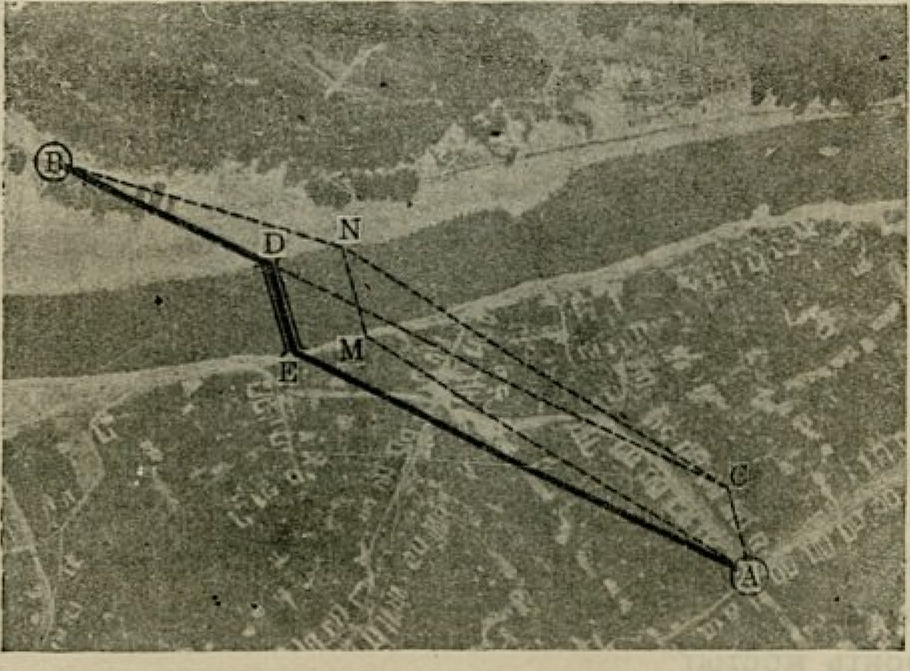


72

ПУТЬ ЧЕРЕЗ РЕКУ

Задача № 21

Между точками *A* и *B* течет река (или канал) с приблизительно параллельными берегами (рис. 70). Нужно



73

построить через реку мост под прямым углом к его берегам. Где следует выбрать место для моста, чтобы путь от A до B был кратчайший?

Решение

Проведя через точку A (рис. 71) прямую, перпендикулярную к направлению реки, и отложив от A отрезок AC, равный ширине реки, соединяем C с B. В точке D и надо построить мост, чтобы путь из A в B был кратчайшим.

Действительно: построив мост DE (рис. 72) и соединив E с A, получим путь $AEDB$, в котором часть AE параллельна CD ($AEDC$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны AC и ED равны и параллельны). Поэтому путь $AEDB$ по длине равен пути ACB. Легко показать, что всякий иной путь длиннее этого. Пусть мы заподозрели, что некоторый путь $AMNB$ (рис. 73) короче $AEDB$, т. е. короче ACB. Соединив C с N, видим, что CN равно AM. Значит, путь $AMNB = ACNB$. Но CNB, очевидно, больше CB; значит, и $ACNB$ больше ACB, а следовательно, больше и $AEDB$.

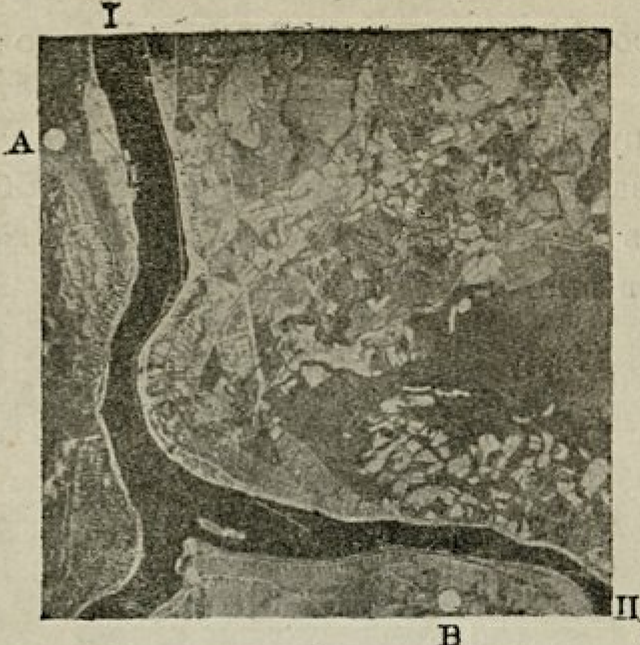
Это рассуждение применимо ко всякому положению моста, не совпадающему с ED; другими словами, путь $AEDB$ действительно кратчайший.

ПОСТРОИТЬ ДВА МОСТА

Задача № 22

Может представиться более сложный случай — именно, когда надо найти кратчайший путь от A до B через реку, которую необходимо пересечь дважды под прямым углом к берегам (рис. 74). В каких местах реки надо тогда построить мосты?

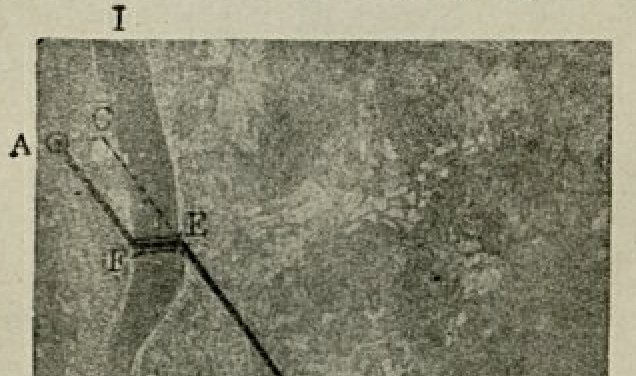
Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.



74

Решение

Нужно из точки *A* (рис. 75) провести отрезок *AC*, равный ширине реки в части I и перпендикулярный к ее берегам. Из точки *B* провести отрезок *BD*, равный ширине реки в части II и также перпендикулярный к берегам.



75

Точки C и D соединить прямой. В точке E строят мост EF, а в точке G мост GH. Путь $AFEGHB$ есть искомый кратчайший путь от A до B.

Как доказать это, читатель, конечно, сообразит сам, если будет в этом случае рассуждать так же, как рассуждали мы в предыдущей задаче.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ОТКРЫТОМ ПОЛЕ

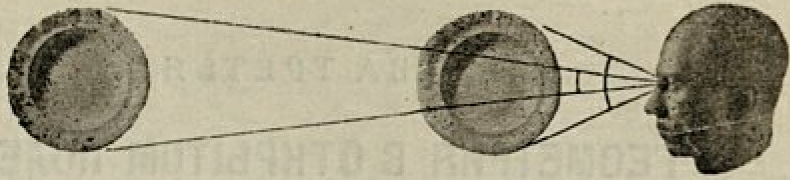
ВИДИМЫЕ РАЗМЕРЫ ЛУНЫ

Какой величины кажется вам полный месяц на небе? От разных людей приходится получать весьма различные ответы на этот вопрос. Самый неожиданный услышал я от одного крестьянина:

— Не знаю. Не здешний ведь я, издалеча.

Хотя в подлунном мире все мы „здешние", однако то, что большинство людей сообщает о кажущихся размерах Луны, немногим лучше этого наивного ответа крестьянина. Луна величиною „с тарелку", „с яблоко", „с человеческое лицо" и т. п. — оценки крайне смутные, неопределенные, свидетельствующие лишь о том, что отвечающие не отдают себе отчета в существе вопроса.

Правильный ответ на столь, казалось бы, обыденный вопрос может дать лишь тот, кто ясно понимает, что, собственно, надо разуметь под „кажущейся", или „видимой" величиной предмета. Мало кто подозревает, что речь идет здесь о величине некоторого угла, — именно того угла, который составляется двумя прямыми линиями, проведенными к нашему глазу от крайних точек рассматриваемого предмета; угол этот называется „углом зрения", или „угловой величиной предмета". И когда кажущуюся величину Луны на небе оценивают, сравнивая ее с размерами тарелки, яблока и т. п., то такие ответы либо вовсе лишены смысла, либо же должны означать, что Луна видна на небе под тем же углом зрения, как тарелка или яблоко. Но такое указание само по себе еще недостаточно: тарелку или яблоко мы ви-



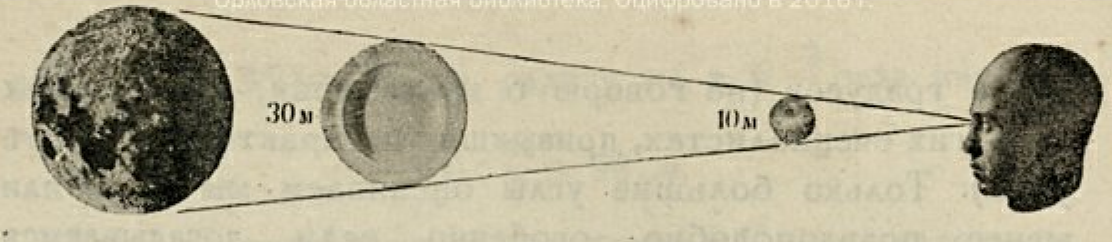
76

дим ведь под различными углами, в зависимости от их отдаления: вблизи — под большими углами, вдали — под меньшими. Чтобы внести определенность, необходимо указать, с **какого расстояния** тарелка или яблоко рассматриваются.

Сравнивать размеры отдаленных предметов с величиной других, расстояние которых не указывается, — весьма обычный литературный прием, которым пользовались и первоклассные писатели. Он производит известное впечатление благодаря своей близости к привычной психологии большинства людей, но ясного образа не порождает. Вот пример из „Короля Лира" Шекспира; описывается (Эдгаром) вид с высокого обрыва морского берега:

Как страшно!
Как кружится голова! Как низко ронять свои взоры...
Галки и вороны, которые вьются там в воздухе на середине расстояния,
Кажутся едва ли так велики, как мухи. На полпути вниз
Висит человек, собирающий морские травы... Ужасное ремесло!
Он мне кажется не больше своей головы.
Рыбаки, которые ходят по побережью, —
Точно мыши; а тот высокий корабль на якоре
Уменьшился до размера своей лодки; его лодка — плавающая точка,
Как бы слишком малая для зрения...

(Перев. И. С. **Тургенева**).



77

Сравнения эти давали бы четкое представление о расстоянии, если бы сопровождались указаниями на степень удаления предметов сравнения (мух, головы человека, мыши, лодки...) Точно также и при сравнении величины луны с тарелкой или яблоком нужны указания, как далеко от глаза должны отстоять эти обиходные предметы.

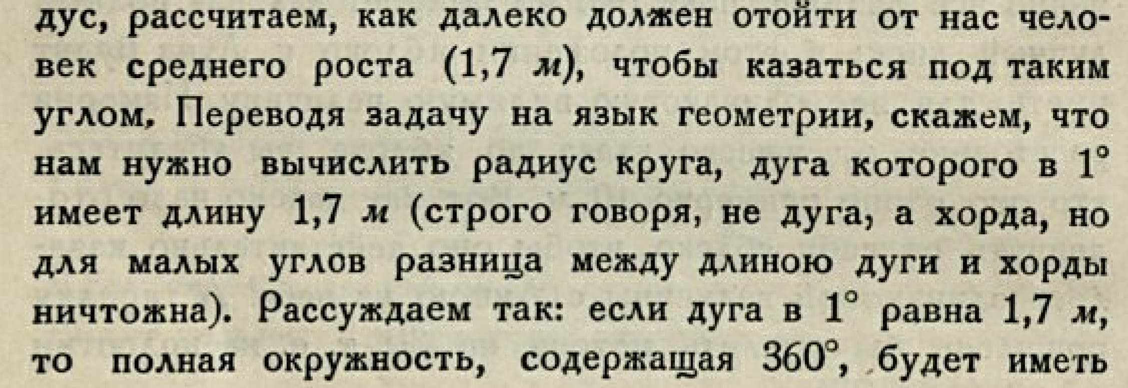
Расстояние это оказывается гораздо большим, чем обычно думают. Держа яблоко в вытянутой руке, вы заслоняете им не только Луну, но и обширную часть неба. Подвесьте яблоко на нитке и отходите от него постепенно все дальше, пока оно не покроет как раз полный лунный диск: в этом положении яблоко и Луна будут иметь для вас одинаковую видимую величину. Измерив расстояние от вашего глаза до яблока, вы убедитесь, что оно равно примерно 10 *м*. Вот как далеко надо отодвинуть от себя яблоко, чтобы оно действительно казалось одинаковой величины с Луною на небе! А тарелку пришлось бы удалить метров на 30, т. е. на полсотни шагов (рис. 77).

Сказанное кажется невероятным каждому, кто слышит об этом впервые, — между тем, это неоспоримо и вытекает из того, что Луна усматривается нами под углом зрения всего лишь в полградуса. Оценивать углы нам в обиходной жизни почти никогда не приходится, и потому большинство людей имеют очень смутное представление о величине угла в 1°, в 2°, в 5° и т. п. небольшое число градусов (не говорю о землемерах, чертежниках и других специалистах, привыкших на практике измерять углы). Только большие углы оцениваем мы более или менее правдоподобно, особенно если догадываемся сравнить их со знакомыми нам углами между стрелками часов; всем, конечно, знакомы углы в 90°, в 60°, в 30°, в 120°, в 150°, которые мы настолько привыкли видеть на циферблате (в 3 ч., в 2 ч., в 1 ч., в 4 ч., в 5 ч.), что даже, не различая цифр, угадываем время по величине угла между стрелками. Но мелкие и отдаленные предметы мы видим обычно под гораздо меньшим углом и потому совершенно не умеем даже приблизительно оценивать углы зрения.

УГОЛ ЗРЕНИЯ

Желая привести наглядный пример угла в один градус, рассчитаем, как далеко должен отойти от нас человек среднего роста (1,7 *м*), чтобы казаться под таким углом. Переводя задачу на язык геометрии, скажем, что нам нужно вычислить радиус круга, дуга которого в 1° имеет длину 1,7 *м* (строго говоря, не дуга, а хорда, но для малых углов разница между длиною дуги и хорды ничтожна). Рассуждаем так: если дуга в 1° равна 1,7 *м*, то полная окружность, содержащая 360°, будет иметь

78



длину $1{,}7 \times 360 \approx 610$ *м*, радиус же в $6\frac{2}{7}$ раза меньше, т. е. равен:

$$610 : \frac{44}{7} \approx 98 \text{ м}.$$

Итак, человек кажется под углом в 1°, если находится от нас, примерно, в расстоянии 100 *м* (рис. 78). Если он отойдет вдвое дальше — на 200 *м* — он будет виден под углом в $\frac{1^\circ}{2}$; если подойдет до расстояния в 50 *м*, то угол зрения возрастет до 2° и т. п.

Нетрудно вычислить также, что палка в 1 *м* длины должна представляться нам под углом в 1° на расстоянии $360 : \frac{44}{7} = 57$ с небольшим метров. Под таким же углом усматриваем мы 1 *см* с расстояния 57 *см*, 1 *км* — с расстояния в 57 *км* и т. д. — вообще, всякий предмет с расстояния, в 57 раз большего, чем его поперечник. Если запомним это число — 57, то сможем быстро и просто производить все расчеты, относящиеся к угловой величине предмета. Например, если желаем определить, как далеко надо отодвинуть яблоко в 9 *см* поперечником, чтобы видеть его под углом 1°, то достаточно умножить 9×57 — получим 510 *см*, или около 5 *м*; с двойного расстояния оно усматривается под вдвое меньшим углом — $\frac{1^\circ}{2}$, т. е. кажется величиною с Луну.

Таким же образом для любого предмета можем мы вычислить то расстояние, на котором он кажется одинаковых размеров с лунным диском.

ТАРЕЛКА И ЛУНА

Задача № 23

На какое расстояние надо удалить тарелку диаметром в 25 *см*, чтобы она казалась такой же величины, как Луна на небе?

Решение

$$25 \times 57 \times 2 = 28 \text{ м.}$$

ЛУНА И МЕДНЫЕ МОНЕТЫ

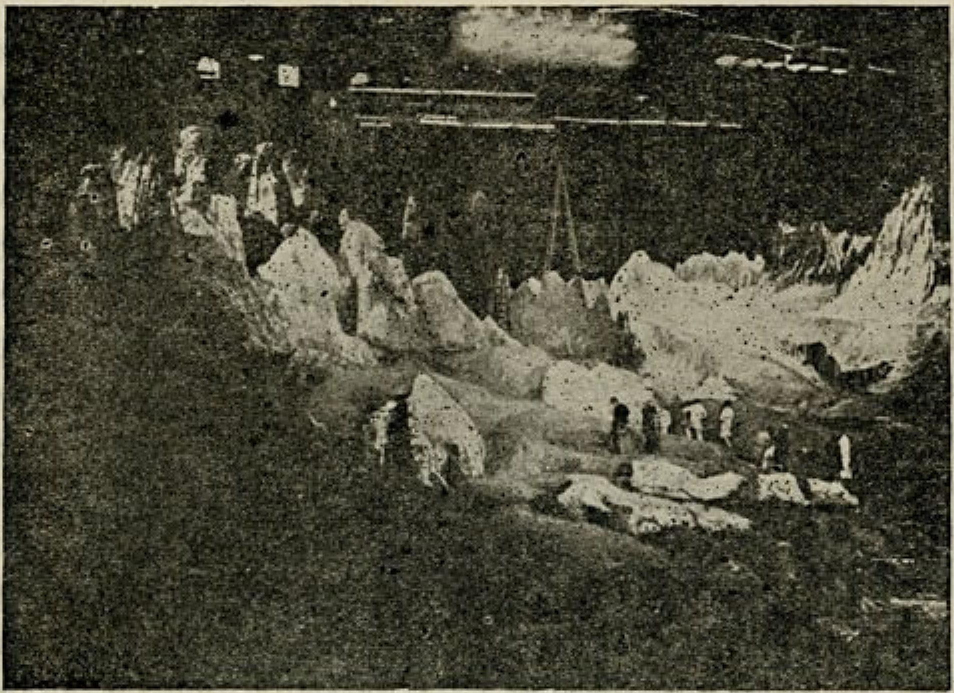
Задача № 24

Сделайте тот же расчет для 5-копеечной (диаметр 25 *мм*) и для 3-копеечной монеты (22 *мм*).

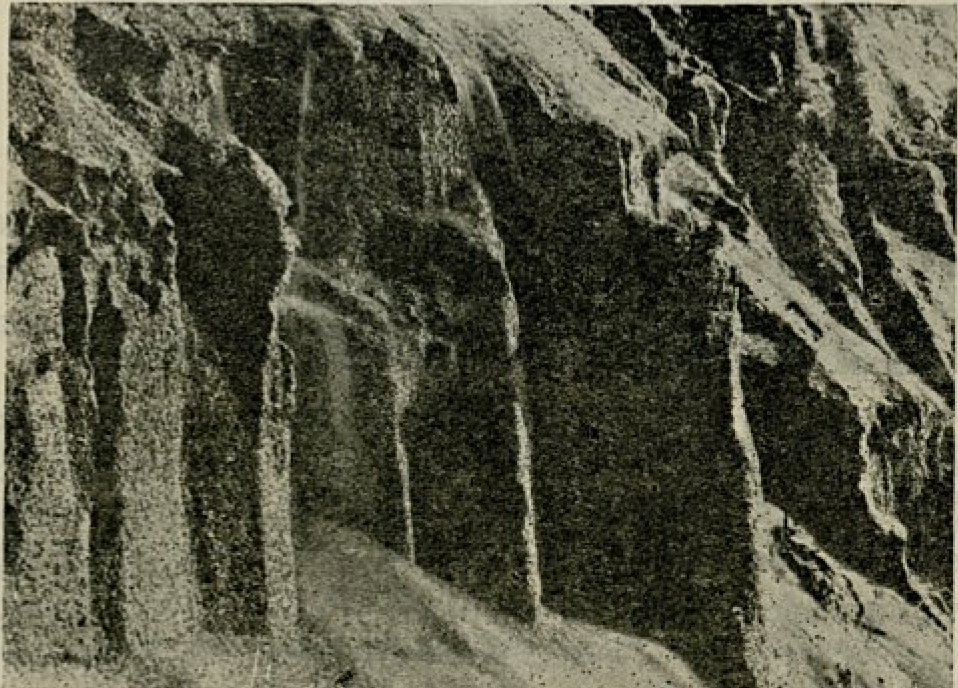
Решение

$$0{,}025 \times 57 \times 2 = 2{,}9 \text{ м,}$$
$$0{,}022 \times 57 \times 2 = 2{,}5 \text{ м.}$$

Если вам кажется невероятным, что Луна представляется глазу не крупнее чем 2-копеечная монета с расстояния 4 шагов или обыкновенный карандаш с расстояния 80 *см*, — держите карандаш в вытянутой руке против диска полной Луны: он с избытком закроет ее. И, как ни странно, наиболее подходящим предметом сравнения для Луны в смысле кажущихся размеров является не тарелка, не яблоко, даже не вишня, а горошина или, еще лучше, головка спички, которую мы рассматриваем в руках! Сравнение с тарелкой или яблоком предполагает удаление их на необычно большое расстояние; яблоко в наших руках или тарелку на обеденном столе мы видим в десять - двадцать раз крупнее, чем лунный диск. И только спичечную головку, которую разглядываем на расстоянии 25 *см* от глаза („расстояние ясного зрения“), мы видим действительно под углом в $\frac{1^\circ}{2}$, т. е. величиною, одинаковой с Луною.



79



80

То, что лунный диск обманчиво вырастает в глазах большинства людей в 10—20 раз, есть один из любопытнейших обманов зрения. Он зависит, надо думать всего больше от *яркости* Луны: полный месяц выделяется на фоне неба гораздо резче, чем выступают среди окружающей обстановки тарелки, яблоки, монеты и иные предметы сравнения.[1] Иллюзия навязывается нам с такой неотразимой принудительностью, что даже художники, отличающиеся верным глазом, поддаются ей на ряду с прочими людьми и изображают на своих картинах полный месяц гораздо крупнее, чем следовало бы. Достаточно сравнить ландшафт, написанный художником, с фотографическим, чтобы в этом убедиться.

Сказанное относится и к Солнцу, которое мы видим с Земли под тем же углом в $\frac{1^\circ}{2}$: хотя истинный поперечник солнечного шара в 400 раз больше лунного, но и удаление его от нас также больше в 400 раз.

СЕНСАЦИОННЫЕ ФОТОГРАФИИ

Чтобы пояснить важное понятие угла зрения, отклонимся немного от нашей прямой темы — геометрия в открытом поле — и приведем несколько примеров из области фотографии.

На рис. 79 вы видите подготовленную для киносъемки сцену в горах. Горы кажутся вам высокими только потому, что сняты под большим углом зрения; на самом же деле это незначительные искусственные возвышения.

Что по вашему мнению изображает рис. 80? Гористую

[1] По той же причине раскаленная нить электрической лампочки кажется нам гораздо толще, чем в холодном, не светящемся состоянии.

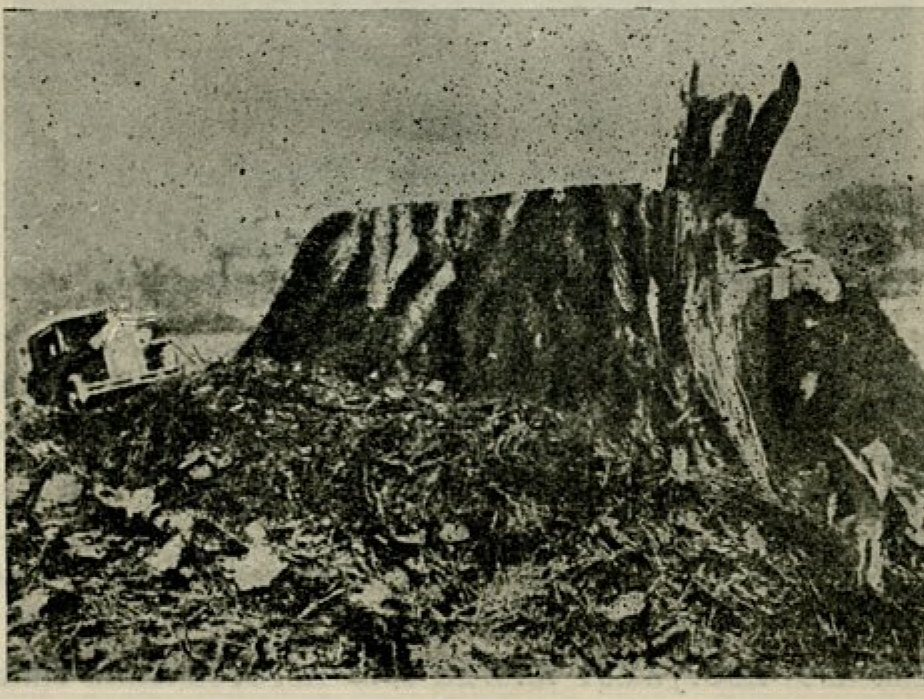
81

местность, не правда ли? Вы видите крутые склоны высоких гор. А между тем, это совсем миниатюрный объект — размытый водою слой песку — снятый под большим углом зрения.

Такого же происхождения исполинская муха, снимок с которой воспроизведен на рис. 81.

Так же поступают иногда для изготовления мнимых репортерских фотографий. В ньюйоркской газете помещена была однажды заметка с упреками по адресу городского самоуправления, допускающего, чтобы на улицах мировой столицы скоплялись огромные горы снега. В подтверждение прилагался снимок одной из таких гор, производящий внушительное впечатление. На поверку оказалось, что натурой для фотографии послужил небольшой снежный бугорок, снятый шутником-фотографом с весьма близкого расстояния, т. е. под необычно большим углом зрения.

В другой раз та же газета воспроизвела снимок широкой расселины в скале близ города; она служила, по словам газеты, входом в обширное подземелье, где пропала без вести группа неосторожных туристов, отважившихся проникнуть в грот для исследования. Отряд добровольцев, снаряженный на розыски заблудившихся, обнаружил, что расселина сфотографирована с... едва заметной трещины в обледенелой стене, трещины в сантиметр шириною!



83

На рис. 82 и 83 воспроизведены еще образчики подобного фальшивого фоторепортажа. Вы видите пень огромного дерева вроде калифорнийской секвойи, сфотографированный в Германии, и кратер вулкана, снятый там же. Мало кто догадался, что натурой для секвойи служил обыкновенный сосновый пень с куклами вместо людей, а для вулкана — небольшая ямка, в которой дымился древесный мусор. Секрет изготовления этих „сенсационных снимков" разоблачается рис. 84.

84

ЖИВОЙ УГЛОМЕР

Изготовить самому угломерный прибор простого устройства не очень трудно, особенно если воспользоваться покупным транспортиром. Но и самодельный угломер не всегда бывает под рукою во время загородной прогулки. В таких случаях можно пользоваться услугами того „живого угломера", который всегда при нас. Это — наши собственные пальцы. Чтобы пользоваться ими для приблизительной оценки углов зрения, нужно лишь произвести предварительно несколько измерений и расчетов.

Прежде всего, надо установить, под каким углом зрения видим мы ноготь указательного пальца своей вытянутой вперед руки. Обычная ширина ногтя — 1 *см*, а расстояние его от глаза в таком положении — около 60 *см*;

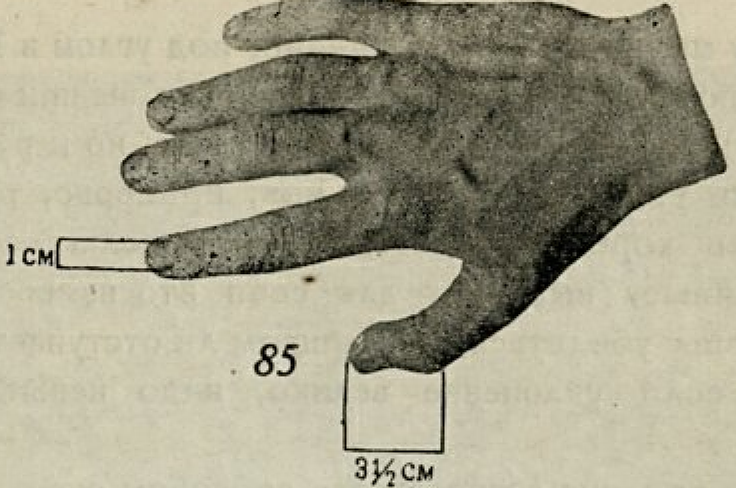
поэтому мы видим его, примерно, под углом в 1° (немного менее, потому что угол в 1° получился бы при расстоянии в 57 *см*). У подростков ноготь меньше, но и рука короче, так что угол зрения для них, примерно, тот же — 1°. Читатель хорошо сделает, если, не полагаясь на книжные данные, выполнит для себя это измерение и расчет, чтобы убедиться, не слишком ли отступает результат от 1°; если уклонение велико, надо испытать другой палец.

Зная это, вы располагаете способом оценивать малые углы зрения буквально голыми руками. Каждый отдаленный предмет, который как раз покрывается ногтем указательного пальца вытянутой руки, виден вами под углом в 1° и, следовательно, отодвинут в 57 раз дальше своего поперечника. Если ноготь покрывает половину предмета, значит — угловая величина его 2°, а расстояние равно 28 поперечникам.

Полная Луна покрывает только половину ногтя, т. е. видна под углом в $^1/_2$° и, значит, отстоит от нас на 114 своих поперечников; вот ценное астрономическое измерение, выполненное буквально голыми руками!

Для углов побольше воспользуйтесь ногтевым суставом вашего большого пальца, держа его с о г н у т ы м на вытянутой руке. У взрослого человека длина (заметьте: д л и н а, а не ширина) этого сустава — около $3^1/_2$ *см*, а расстояние от глаза, при вытянутой руке, — около 55 *см*. Легко рассчитать, что угловая величина его в таком положении должна равняться 4°. Это дает средство оценивать углы зрения в 4° (а значит — и в 8°).

Сюда надо присоединить еще два угла, которые могут быть измерены пальцами, — именно те, под которыми нам представляются на вытянутой руке промежутки: 1) между средним и указательным пальцами, расставлен-



85

ными возможно шире; 2) между большим и указательным, также раздвинутыми в наибольшей степени. Нетрудно вычислить, что первый угол равен, примерно, 7—8°, второй 15—16°.

Заодно укажем также способ проводить на местности прямые углы, пользуясь лишь своим собственным телом.

Если вам нужно провести через некоторую точку перпендикуляр к данному направлению, то став на эту точку, лицом в направлении данной линии, вы, **не поворачивая пока головы**, свободно протягиваете руку в ту сторону, куда желаете провести перпендикуляр. Сделав это, приподнимите большой палец своей вытянутой руки, поверните к нему голову и заметьте, какой предмет — камешек, кустик и т. п. — покрывается большим пальцем, если на него смотреть соответствующим глазом (т. е. правым, когда вытянута правая рука, и левым — когда левая).

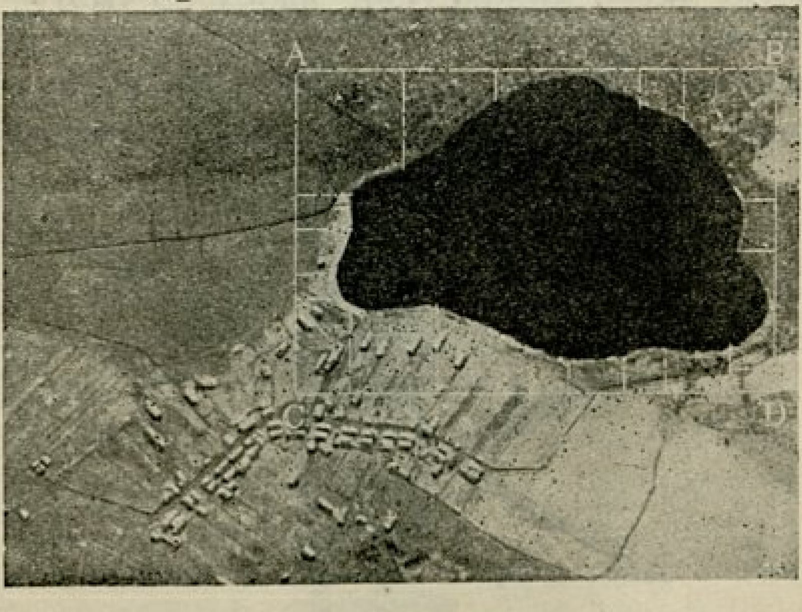
Вам остается лишь отметить на земле прямую линию от места, где вы стояли, к замеченному предмету, — это и будет искомый перпендикуляр. Способ, как будто не обещающий хороших результатов, но после недолгих упражнении вы научитесь ценить услуги этого „живого эккера“[1] не ниже настоящего, крестообразного.

Случаев применить ваш живой угломер во время прогулок по открытой местности может представиться множество. Пусть вдалеке виден товарный вагон, который покрывается, примерно, половиною сустава большого пальца вашей вытянутой руки, т. е. виден под углом около 2°. Так как длина товарного вагона известна (около 6 *м*), то вы легко находите, какое растояние вас от него отделяет: $6 \times 28 = 170$ *м*, или около того. Измерение, конечно грубо приближенное, но все же более надежное, чем необоснованная оценка просто на-глаз.

Далее помощью „живого угломера“ вы можете, при отсутствии всяких приспособлений, измерять угловую высоту светил над горизонтом, взаимное удаление звезд в градусной мере, видимые размеры огненного пути ме-

---

[1] Эккером называется землемерный прибор для проведения на местности линий под прямым углом.



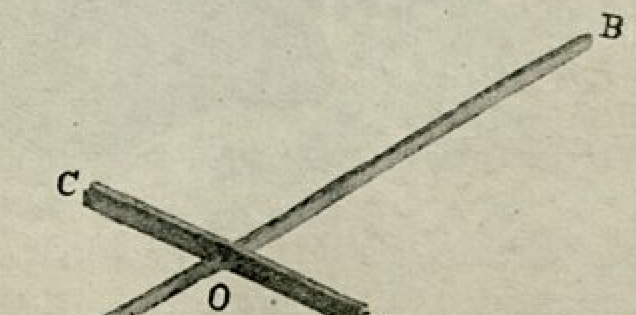
86

теора и т. п. Наконец, умея без приборов проводить прямые углы на местности, вы можете снять план небольшого участка — по способу, сущность которого ясна из рис. 86: например, при съемке озера измеряют прямоугольник *ABCD*, а также длины перпендикуляров, опущенных из выдающихся точек берега, и расстояния их оснований от вершин прямоугольника. Словом, в положении Робинзона уменье пользоваться собственными руками для измерения углов (и ногами для измерения расстояний) могло бы пригодиться для самых разнообразных надобностей.

ЖЕЗЛ ЯКОВА

При желании располагать более точным измерителем углов, нежели сейчас описанный нами природный „живой угломер“, вы можете изготовить себе простой и удобный прибор, некогда служивший нашим предкам. Это—названный по имени изобретателя „жезл Якова“ — прибор, бывший в широком употреблении у мореплавателей до XVIII века (рис. 87), — до того как его постепенно вытеснили еще более удобные и точные угломеры (секстанты).

Он состоит из длинной линейки *AB*, в 70 — 100 *см*, по которой может скользить перпендикулярный к ней



87

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

брусок CD; обе части CO и OD скользящего бруска равны между собою. Если вы желаете помощью этого прибора определить угловое расстояние между звездами S и S' (рис. 89 слева), то приставляете к глазу конец A линейки (где для удобства наблюдения приделана просверленая пластинка), и направляете линейку так, чтобы звезда S' была видна у конца B линейки; затем двигаете поперечину CD вдоль линейки до тех пор, пока звезда S не будет видна как раз у конца C (рис. 89 слева). Теперь остается лишь измерить расстояние AO, чтобы, зная длину CO, вычислить величину угла SAS'. Знакомые с тригонометрией сообразят, что тангенс искомого угла равен отношению $\frac{CO}{AC}$; наша „походная тригонометрия“, изложенная в главе V, также достаточна для выполнения этого расчета; вы вычисляете, по теореме Пифагора, длину AC, затем находите угол, синус которого равен $\frac{CO}{AC}$.

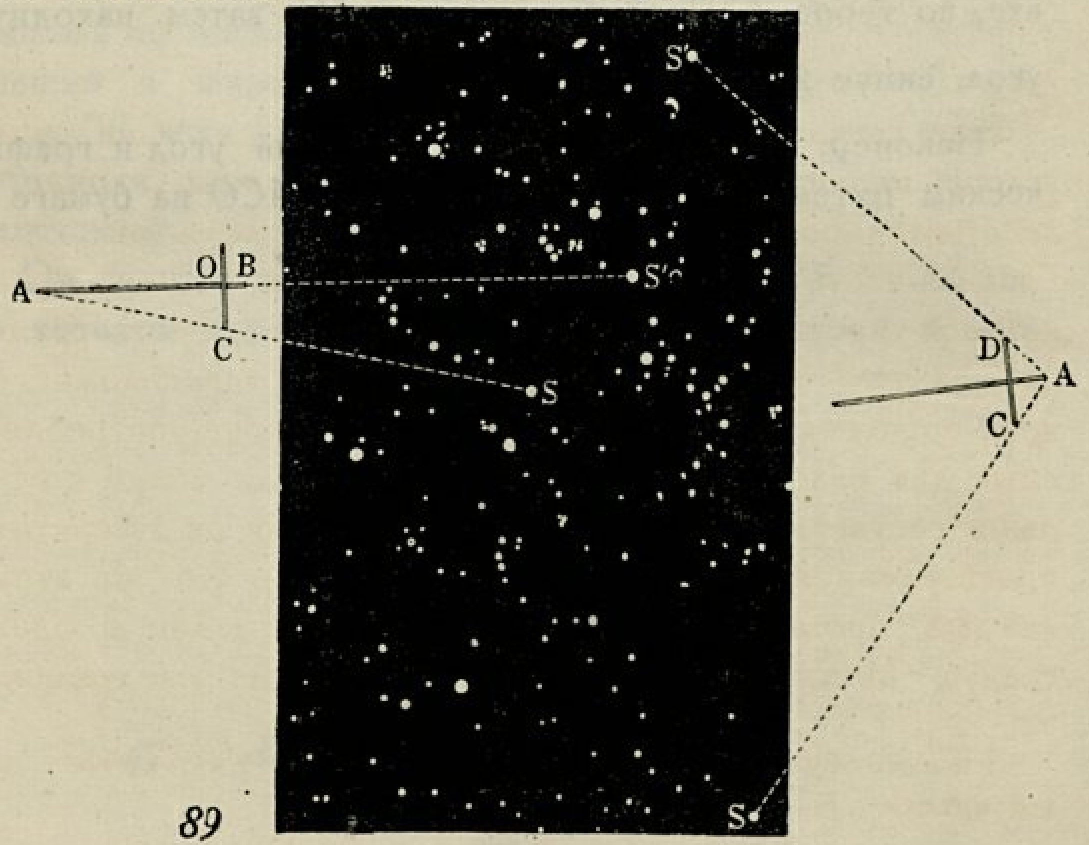
Наконец, вы можете узнать искомый угол и графически путем: построив треугольник ACO на бумаге в

88

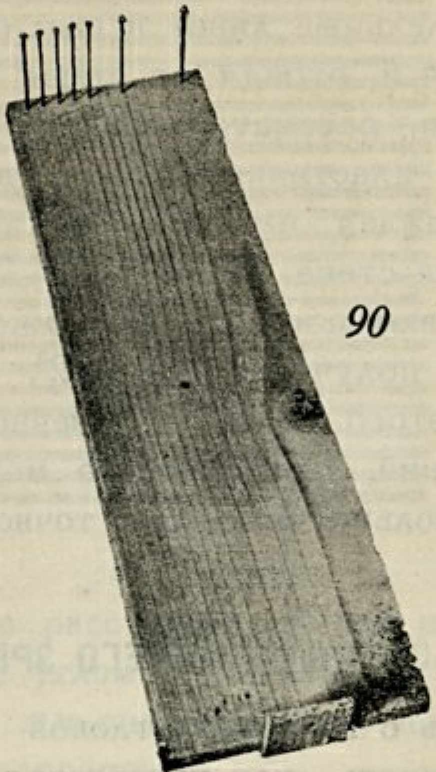
произвольном масштабе, измеряете угол A транспортиром.

Для чего же нужна другая половина поперечины? На тот случай, когда измеряемый угол слишком велик, так что его не удается измерить сейчас указанным путем. Тогда на звезду S' направляют не линейку AB, а прямую AD, подвигая поперечину так, чтобы ее конец C пришелся в то же время у звезды S (рис. 89, справа). Найти величину угла SAS' вычислением или построением, конечно, не составит труда.

Чтобы при каждом измерении не приходилось делать расчета или построения, можно выполнить их заранее, еще при изготовлении прибора, и обозначить результаты на линейке AB; тогда, направив прибор на звезды, вы прочитываете лишь показание, записываете у точки O,— это и есть величина измеряемого угла.



89



90

ГРАБЕЛЬНЫЙ УГЛОМЕР

Еще легче изготовить другой прибор для измерения угловой величины—так называемый „грабельный угломер", действительно напоминающий по виду грабли (рис. 90). Главная часть его — дощечка любой формы, у одного края которой укреплена просверленная пластинка; ее отверстие наблюдатель приставляет к глазу. У противоположного края дощечки втыкают ряд тонких булавок (употребляемых для колекции насекомых), промежутки между которыми составляют 57-ю долю их расстояния от отверстия просверленной пластинки.[1] Мы уже знаем, что при этом каждый промежуток усматривается под углом в один градус. Можно разместить булавки также следующим

[1] Вместо булавок можно употреблять рамку с натянутыми на ней нитями.

приемом, дающим более точный результат: на стене чертят две параллельные линии в расстоянии одного метра одну от другой и, отойдя от стены по перпендикуляру к ней на 57 *м*, рассматривают эти линии в отверстие просверленной пластинки; булавки втыкают в дощечку так, чтобы каждая пара смежных булавок покрывала начерченные на стене линии.

Когда булавки поставлены, можно некоторые из них снять, чтобы получить углы в 2°, в 3°, в 5°. Способ употребления этого угломера, конечно, понятен читателю и без объяснений. Помощью его можно измерить углы зрения с довольно большою точностью, не меньшей чем $^1/_4$°.

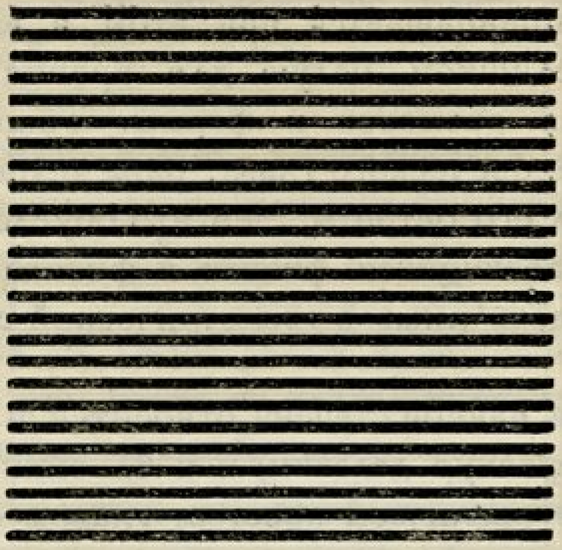
ОСТРОТА ВАШЕГО ЗРЕНИЯ

Освоившись с понятием угловой величины предмета, вы сможете понять, как измеряется острота зрения, и и даже сами выполнить такого рода измерение.

Начертите на листе бумаги 20 равных черных линий длиною в спичку (5 *см*) и в миллиметр толщины, так, чтобы они заполняли квадрат (рис. 91). Прикрепив этот чертеж на хорошо освещенной стене, отходите от него до тех пор, пока не заметите, что линии уже не различаются раздельно, а сливаются в сплошной серый фон. Измерьте это расстояние и вычислите — вы уже знаете как — угол зрения, под которым вы перестаете различать полоски в 1 *мм* толщины. Если этот угол равен 1′ (одной минуте), то острота вашего зрения нормальная; если трем минутам — острота составляет $^1/_3$ нормального, и т. д.

Задача № 25.

Линии рис. 91 сливаются для вашего глаза на расстоянии 2 *м*. Нормальна ли острота зрения?



91

Решение

Мы знаем, что с расстояния 57 *мм* полоска в 1 *мм* ширины видна под углом 1°, т. е. 60′. Следовательно, с расстояния 2 000 *мм* она видна под углом *x*, который определяется из пропорции

$$x : 60 = 57 : 2\,000,$$
$$x = 1{,}7.$$

Острота зрения ниже нормальной и составляет

$$1 : 1{,}7 = \text{около } 0{,}6.$$

ПРЕДЕЛЬНАЯ МИНУТА

Сейчас мы сказали, что полоски, рассматриваемые под углом зрения менее одной минуты, перестают различаться раздельно нормальным глазом. Это справедливо для всякого предмета: каковы бы ни были очертания наблюдаемого объекта, они перестают различаться нормальным глазом, если видны под углом меньше 1′. Каж-

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

дый предмет превращается при этом в едва различимую точку, „слишком малую для зрения“ (Шекспир), в пылинку без размеров и формы. Таково свойство нормального человеческого глаза: одна угловая минута — средний предел его остроты. Чем это обусловлено — вопрос особый, касающийся физики и физиологии зрения. Мы говорим здесь лишь о геометрической стороне явления.

Сказанное в равной степени относится и к предметам крупным, но чересчур далеким, и к близким, но слишком мелким. Мы не различаем простым глазом формы пылинок, реющих в воздухе: озаряемые лучами солнца, они представляются нам одинаковыми крошечными точками, хотя в действительности имеют весьма разнообразную форму. Мы не различаем мелких подробностей тела насекомого опять-таки потому, что видим их под углом меньше $1'$. По той же причине не видим мы без телескопа деталей на поверхности Луны, планет и других небесных светил; они лежат ниже предела остроты нашего зрения, усматриваются под углом меньше $1'$.

Мир представлялся бы нам совершенно иным, если бы граница естественного зрения была отодвинута далее. Человек, предел остроты зрения которого был бы не $1'$, а, например, $^1/_4{}'$, видел бы окружающий мир глубже и дальше, чем мы. Очень картинно описано это преимущество з о р к о г о глаза у Чехова в повести „Степь“.

„Зрение у него (Васи) было поразительно острое. Он видел так хорошо, что бурая пустынная степь была для него всегда полна жизни и содержания. Стоило ему только вглядеться в даль, чтобы увидеть лисицу, зайца, дрохву или другое какое-нибудь животное, держащее себя подальше от людей. Немудрено увидеть убегающего зайца или летящую дрохву, — это видел всякий, проезжавший степью, — но не всякому доступно видеть диких животных в их домашней жизни, когда они не бегут, не прячутся и не глядят встревоженно по сторонам. А Вася видел играющих лисиц, зайцев, умывающихся лапками, дрохв, расправляющих крылья, стрепетов, выбивающих свои „точки“. Благодаря такой остроте зрения, кроме мира, который видели все, у Васи был еще другой мир, свой собственный, никому недоступный и, вероятно, очень хороший, потому что, когда он глядел и восхищался, трудно было не завидовать ему“.

Странно подумать, что для такой поразительной перемены достаточно лишь понизить предел различимости с $1'$ до $\frac{1}{2}'$ или около того...

Волшебное действие микроскопов и телескопов обусловлено тою же самой причиной. Назначение этих приборов — так изменять ход лучей рассматриваемого предмета, чтобы они вступали в глаз более круто расходящимся пучком; благодаря этому, объект представляется под бо̀льшим углом зрения. Когда говорят, что микроскоп или телескоп увеличивает в 100 раз, то это значит, что помощью их мы видим предметы под углом в 100 раз большим, чем невооруженным глазом. И тогда подробности, скрывающиеся от простого глаза за пределом остроты зрения, становятся доступны нашему зрению. Полный месяц мы видим под углом в $30'$; а так как поперечник Луны $=3500$ *км*, то каждый участок Луны, имеющий в поперечнике $\frac{3500}{30}$, т. е. около 120 *км*, сливается для невооруженного глаза в едва различимую точку. В трубу же, увеличивающую в 100 раз, неразличимыми будут уже гораздо более мелкие участки с поперечником в $\frac{120}{100} = 1{,}2$ *км*, а в телескоп с 1 000-кратным увеличением — участок в 120 *м* шириною. Отсюда следует, между прочим, что будь на Луне такие, например, сооружения, как наши крупные заводы или океанские пароходы, мы могли бы их видеть в современные телескопы.[1]

Правило предельной минуты имеет большое значение и для обычных наших повседневных наблюдений. В силу этой особенности нашего зрения каждый предмет, удаленный на 3400 (т. е. 57 × 60) своих поперечников, перестает различаться нами в своих очертаниях и сливается в точку. Поэтому, если кто-нибудь станет уверять вас, что простым глазом узнал лицо человека с расстояния четверти километра, не верьте ему, — разве только он обладает феноменальным зрением. Ведь расстояние между глазами человека — всего 3 *см*; значит оба глаза сливаются в точку уже на расстоянии 3 × 3400 *см*, т. е. 100 *м*. Артиллеристы пользуются этим для глазомерной оценки расстояния. По их правилам, если глаза человека кажутся издали двумя раздельными точками, то расстояние до него не превышает 100 шагов (т. е. 60—70 *м*). У нас получилось большее расстояние — в 100 *м*: это показывает, что примета военных имеет в виду несколько пониженную (на 30%) остроту зрения.

Задача № 26.

Может ли человек с нормальным зрением различить всадника на расстоянии 10 *км*, пользуясь биноклем, увеличивающим в 3 раза?

---

[1] При условии полной прозрачности и однородности нашей атмосферы. В действительности воздух не однороден и не вполне прозрачен; поэтому при больших увеличениях видимая картина туманится и искажается. Это ставит предел пользованию весьма сильными уве-

Решение

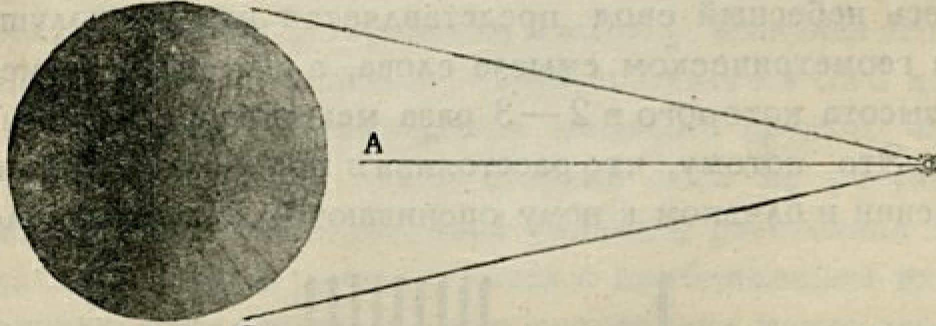
Высота всадника 2,2 *м*. Фигура его превращается в точку для простого глаза на расстоянии $2{,}2 \times 3\,400 = 7$ *км*; в бинокль же, увеличивающий втрое, — на расстоянии 21 *км*. Следовательно, в 10 *км* различить его в такой бинокль возможно (если воздух достаточно прозрачен).

ЛУНА И ЗВЕЗДЫ У ГОРИЗОНТА

Самый невнимательный наблюдатель знает, что полный месяц, стоящий низко у горизонта, имеет заметно бо̀льшую величину, чем когда он висит высоко в небе. Разница так велика, что трудно ее не заметить. То же верно и для солнца; известно, как велик солнечный диск при заходе или восходе по сравнению с его размерами высоко в небе, — например, когда он просвечивает сквозь облака (прямо смотреть на незатуманенное солнце вредно для глаз).

Для звезд эта особенность проявляется в том, что расстояния между ними увеличиваются, когда они приближаются к горизонту. Кто видел зимою красивое созвез-

92



—

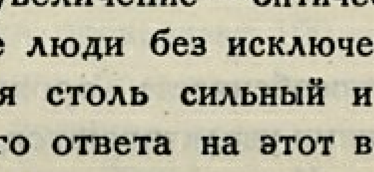
личениями и побуждает астрономов воздвигать обсерватории в ясном воздухе высоких горных вершин.

дие Ориона (или летом — Лебедя) высоко на небе и низко близ горизонта, тот не мог не поразиться огромной разницей размеров созвездия в обоих положениях.

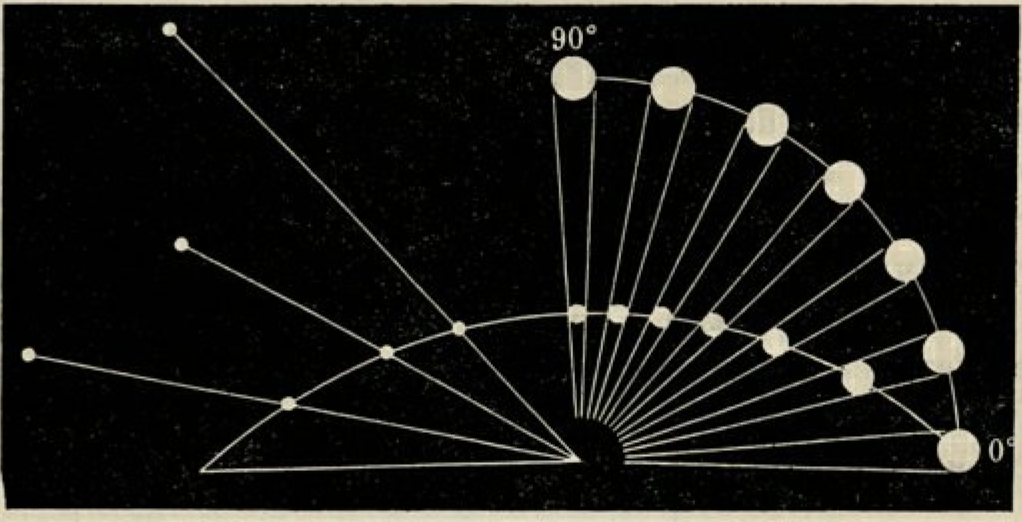
Все это тем загадочнее, что когда мы смотрим на светила при восходе или заходе, они не только не ближе но, напротив, дальше (на величину земного радиуса), как легко понять из рис. 92: в зените мы рассматриваем светило из точки *A*, а у горизонта — из точек *B* или *C*. Почему же луна, солнце и созвездия увеличиваются у горизонта?

„Потому что это не верно“, — можно бы ответить. Это обман зрения. Помощью грабельного или иного угломера нетрудно убедиться, что лунный диск виден в обоих случаях под одним и тем же углом зрения в $^1/_2$°. Пользуясь тем же прибором или „посохом Якова“, можно удостовериться, что и угловые расстояния между звездами не меняются, где бы созвездие ни стояло: у зенита или у горизонта. Значит, увеличение — оптический обман, которому поддаются все люди без исключения.

Чем объясняется столь сильный и всеобщий обман зрения? Бесспорного ответа на этот вопрос наука еще не дала, хотя и стремится разрешить его 2000 лет, со времени Птолемея. Иллюзия находится в связи с тем, что весь небесный свод представляется нам не полушаром в геометрическом смысле слова, а шаровым сегментом, высота которого в 2—3 раза меньше радиуса основания. Это потому, что расстояния в горизонтальном направлении и близком к нему оцениваются нами как более



93



94

значительные, по сравнению с вертикальными: по первому направлению мы видим земные предметы, по второму — перед нами пустой, ничем не заполненный промежуток; а известно, что пространства заполненные всегда кажутся нам больше пустых (рис. 93).

На рис. 94 наглядно показано, как влияет приплюснутая форма небесного свода на величину светил в разных его частях. На своде неба лунный диск всегда виден под углом в $^1/_2$°, — будет ли Луна у горизонта (на высоте 0°), или у зенита (на высоте 90°). Но глаз наш относит этот диск не всегда на одно и то же расстояние: Луна в зените отодвигается нами на более близкое расстояние, нежели у горизонта, и потому величина его представляется неодинаковой — внутри одного и того же угла ближе к вершине помещается меньший кружок, чем подальше от нее. На левой стороне того же рисунка показано, как, благодаря этой причине, расстояния между звездами словно растягиваются с приближением их к горизонту: одинаковые угловые расстояния между ними кажутся тогда неодинаковыми.

Есть здесь и другая поучительная сторона. Любуясь огромным лунным диском близ горизонта, заметили ли вы на нем хоть одну новую черточку, которой не удалось вам различить на диске высоко стоящей Луны? Нет. Но ведь перед вами увеличенный диск, — отчего же не видно новых подробностей? Оттого, что здесь нет того увеличения, какое дает, например, бинокль: здесь не увеличивается угол зрения, под которым представляется нам предмет. Только увеличение этого угла помогает нам различать новые подробности; всякое иное „увеличение" есть просто обман зрения, для нас совершенно бесполезный.[1]

КАКОЙ ДЛИНЫ ТЕНЬ ЛУНЫ И ТЕНЬ СТРАТОСТАТА?

Довольно неожиданное применение для угла зрения найдено мною в задачах на вычисление длины тени, отбрасываемой различными телами в пространстве. Луна, например, отбрасывает в мировом пространстве конус тени, который сопровождает ее всюду. Как далеко эта тень простирается?

Чтобы выполнить это вычисление, нет необходимости, основываясь на подобии треугольников, составлять пропорцию, в которую входят диаметры Солнца и Луны, а также расстояние между Луной и Солнцем. Расчет можно сделать гораздо проще. Вообразите, что глаз ваш помещен в той точке, где кончается конус лунной тени, в вершине этого конуса, и вы смотрите оттуда на Луну. Что вы увидите? Черный круг Луны, закрывающий Солнце. Угол зрения, под которым виден нам диск Луны (или Солнца), известен: он равен половине градуса. Но мы уже знаем, что предмет, видимый под углом в $^1/_2$°, уда-

---

[1] Подробнее см. в книге того же автора „Занимательная физика", кн. 2-я, гл. IX.

лен от наблюдателя на $2 \times 57 = 114$ своих поперечников. Значит, вершина конуса лунной тени отстоит от Луны на 114 лунных поперечников. Отсюда длина лунной тени равна

$$3500 \times 114 \approx 400\,000 \textit{ км.}$$

Она длиннее расстояния от Земли до Луны; оттого и могут случаться полные солнечные затмения (для мест земной поверхности, которые погружаются в эту тень).

Нетрудно вычислить длину и тени Земли в пространстве: она во столько раз больше лунной, во сколько раз диаметр Земли превышает диаметр Луны, т. е. примерно в 4 раза.

Тот же прием годен и для вычисления длины пространственных теней более мелких предметов. Найдем, например, как далеко простирался в воздухе конус тени, отбрасываемой стратостатом „СОАХ-I“ в тот момент, когда оболочка его раздувалась в шар. Так как диаметр шара стратостата 36 *м*, то длина его тени (угол при вершине конуса тени тот же, $1/2^\circ$)

$$36 \times 114 \approx 4100 \textit{ м,}$$

или около 4 *км*.

Во всех рассмотренных случаях речь шла, конечно, о длине полной тени, а не полутени.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ БЕССМЫСЛИЦА

О видимой величине предметов приходится слышать нередко совершенно бессмысленные утверждения, причем люди, их высказывающие, твердо уверены, что говорят о чем-то вполне ясном, бесспорном. У одного известного советского беллетриста находим, например, такую фразу:

„Была невероятная луна диаметром в аршин"....

Видный сельскохозяйственный писатель рассказывает: „Дело было к вечеру; солнце стояло на горизонте (над горизонтом?) каких-нибудь 3—4 аршина".

Прискорбнее всего то, что эти образчики аршинной астрономии попали в школьные учебники.

Еще удивительнее по полному отсутствию смысла то, что помещено в одной общепонятной брошюре, носящей заглавие, весьма сходное с „Занимательной геометрией". Там приведена следующая таблица „степени уменьшения предметов по высоте с различных расстояний":

Расстояние в метрах	Степень уменьшения
100	$^2/_3$
200	$^1/_2$
300	$^1/_3$
400	$^1/_4$
500	$^1/_5$

и т. д.

Пояснительное примечание завершает бессмыслицу: „Таким образом, человек 170 *см* роста с расстояния 500 *м* покажется ростом в $\frac{170}{5} = 34$ *см*".

Таблица, расчет — все это имеет как будто разумный вид. А между тем, в них не больше смысла, чем в знаменитой дате гоголевского героя: „Мартобря 86 числа, между днем и ночью".

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ УПРАЖНЕНИЙ

Пусть читатель сам применит теперь почерпнутые из этой главы сведения к решению ряда следующих разнообразных задач:

Человек среднего роста (1,7 *м*) виден издали под углом 12′. Найти расстояние до него.

Кавалерист (на лошади — 2,2 *м*) виден издали под углом 9′. Найти расстояние до него.

Телеграфный столб (8 *м*) виден под углом 22′. Найти расстояние до него.

Маяк высотою 42 *м* виден с корабля под углом 1°10′. На каком расстоянии от маяка находится корабль?

Земной шар усматривается с Луны под углом 1°54′. Определить расстояние Луны от Земли.

С расстояния 2 *км* видно здание под углом 12′. Найти высоту здания.

Луна видна с Земли под углом 30′. Зная, что расстояние до Луны равно 380 000 *км*, определить ее диаметр.

Как велики должны быть буквы на классной доске, чтобы ученики, сидя на партах, видели их столь же ясно, как буквы в своих книгах (в расстоянии 25 *см* от глаза)? Расстояние от парт до доски взять 5 *м*.

Микроскоп увеличивает в 50 раз. Можно ли в него рассматривать кровяные тельца человека, поперечник которых 0,007 *мм*?

Если бы на Луне были люди нашего роста, то какое увеличение телескопа требовалось бы, чтобы различить их с Земли?

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ У ДОРОГИ

ИСКУССТВО МЕРИТЬ ШАГАМИ

Очутившись во время загородной прогулки у железнодорожного полотна или на шоссе, вы можете выполнить ряд интересных геометрических упражнений.

Прежде всего, воспользуйтесь шоссе, чтобы измерить длину своего шага и скорость ходьбы. Это даст вам возможность измерять расстояние шагами, — искусство, которое приобретается довольно легко после недолгого упражнения. Главное здесь — приучить себя делать шаги всегда одинаковой длины, т. е. усвоить определенную „мерную" походку.

На шоссе через каждые 100 метров установлен белый камень; пройдя такой 100-метровый промежуток своим обычным „мерным" шагом и сосчитав число шагов, вы легко найдете среднюю длину своего шага. Подобное измерение следует повторять ежегодно, — например, каждую весну, потому что длина шага, особенно у молодых людей, не остается неизменной.

Отметим любопытное соотношение, обнаруженное многократными измерениями: средняя длина шага взрослого человека равна, примерно, половине его роста считая до уровня глаз. Если, например, рост человека до глаз 1 *м* 40 *см*, то длина его шага — около 70 *см*. Интересно при случае проверить это правило.

Кроме длины своего шага, полезно знать также скорость своей ходьбы — число километров, проходимых в час. Иногда пользуются для этого следующим правилом: мы проходим в час столько километров, сколько делаем шагов в три секунды; например, если в три секунды мы делаем 4 шага, то в час проходим 4 *км*. Однако правило это применимо лишь при известной длине шага. Нетрудно определить, при какой именно: обозначив длину шага в метрах через x, а число шагов в 3 сек. через n, имеем уравнение

$$\frac{3\,600}{3} \cdot nx = n \cdot 1\,000,$$

откуда $1\,200\ x = 1\,000$, и $x = {}^5/_6$ *м*, т. е. около 80—85 *см*. Это сравнительно большой шаг; такие шаги делают люди высокого роста. Если ваш шаг отличается от 80—85 *см*, то вам придется произвести измерение скорости своей ходьбы иным способом, определив по часам, во сколько времени проходите вы расстояние между двумя дорожными столбами.

ГЛАЗОМЕР

Приятно уметь не только измерять расстояния без мерной цепи, шагами, но и оценивать их прямо на-глаз без измерения. Это искусство достигается лишь путем упражнения. В мои школьные годы, когда с группой товарищей я участвовал в летних экскурсиях за город, подобные упражнения были у нас очень обычны. Они осуществлялись в форме особого спорта, нами самими придуманного, — в форме состязания на точность глазомера. Выйдя на дорогу, мы намечали глазами какое-нибудь придорожное дерево или другой отдаленный предмет, — и состязание начиналось.

— Сколько шагов до дерева? — спрашивал кто-либо из участников игры.

Остальные называли предполагаемое число шагов, и затем совместно считали шаги, чтобы определить, чья оценка ближе к истинной, — это и был выигравший. Тогда наступала его очередь намечать предмет для глазомерной оценки расстояния.

Кто определял расстояние удачнее других, тот получал одно очко. После 10 раз подсчитывали очки: получивший наибольшее число очков считался победителем в состязании.

Помню, на первых порах наши оценки расстояний давались с грубыми ошибками. Но очень скоро, — гораздо скорее, чем можно было ожидать, — мы так изощрились в искусстве определять на-глаз расстояния, что ошибались очень мало. Лишь при резкой перемене обстановки, например при переходе с пустынного поля в редкий лес или на заросшую кустарником поляну, при возвращении в пыльные, тесные городские улицы, а также ночью, при обманчивом освещении луны, мы ловили друг друга на крупных ошибках. Потом, однако, научились применяться ко всяким обстоятельствам, мысленно учитывать их при глазомерных оценках. Наконец группа наша достигла такого совершенства в глазомерной оценке расстояний, что пришлось отказаться совсем от этого спорта: все угадывали одинаково хорошо, и состязания утратили интерес. Зато мы приобрели недурной глазомер, сослуживший нам хорошую службу во время наших загородных странствований.

Любопытно, что глазомер как будто не зависит от остроты зрения. Среди нашей группы был близорукий мальчик, который не только не уступал остальным в точности глазомерной оценки, но иной раз даже выходил победителем из состязаний. Наоборот, одному мальчику с вполне нормальным зрением искусство определять расстояния на-глаз никак не давалось. Впоследствии мне пришлось наблюдать то же самое и при глазомерном определении высоты деревьев: упражняясь в этом с другими студентами — уже не для игры, а для нужд будущей профессии, — я заметил, что близорукие овладевали этим искусством нисколько не хуже других. Это может служить утешением для близоруких: не обладая зоркостью, они все же способны развить в себе вполне удовлетворительный глазомер.

Упражняться в глазомерной оценке расстояний можно во всякое время года, в любой обстановке. Идя по улице города, вы можете ставить себе глазомерные задачи, пытаясь отгадывать, сколько шагов до ближайшего фонаря, до того или иного попутного предмета. В дурную погоду вы незаметно заполните таким образом время переходов по безлюдным улицам.

Глазомерному определению расстояний много внимания уделяют военные: хороший глазомер необходим разведчику, стрелку, артиллеристу. Интересно познакомиться с теми признаками, которыми пользуются они на практике глазомерных оценок. Вот несколько замечаний из учебника артиллерии:

„На-глаз расстояния определяют или по навыку различать по известной степени отчетливости видимых предметов их разные удаления от наблюдателя, или оценивая расстояния некоторым привычным глазу протяжением в 100—200 шагов, кажущимся тем меньшим, чем далее от наблюдателя оно откладывается.

„При определении расстояний по степени отчетливости видимых предметов следует иметь в виду, что кажутся ближе предметы освещенные или ярче отличающиеся по цвету от местности или на воде; предметы, расположенные выше других; группы — сравнительно с отдельными предметами и, вообще, предметы более крупные.

„Можно руководствоваться следующими признаками: до 50 шагов можно ясно различать глаза и рот людей; до 100 шагов глаза кажутся точками; на 200 шагов пуговицы и подробности обмундирования все еще можно различать; на 300 — видно лицо; на 400 — различается движение ног; на 500 виден цвет мундира“.

При этом наиболее изощренный глаз делает ошибку до 10% определяемого расстояния в ту или другую сторону.

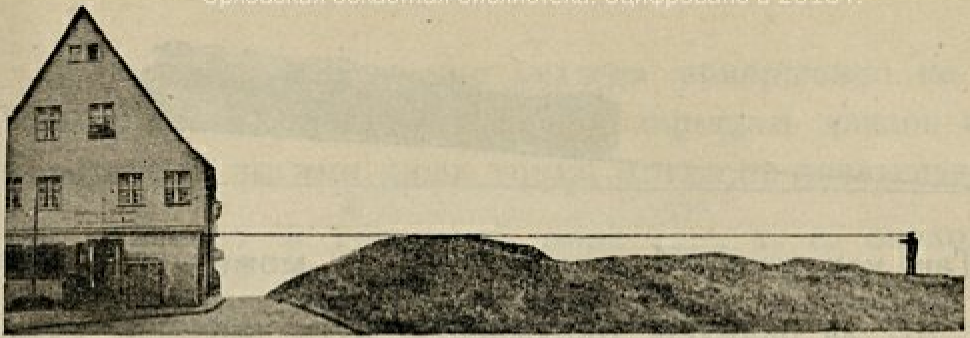
Бывают, впрочем, случаи, когда ошибки глазомера гораздо значительнее. Во-первых, при определении расстояния на ровной, совершенно одноцветной поверхности — на водной глади рек или озера, на чистой песчаной равнине, на густо заросшем поле. Тут расстояние всегда кажется меньшим истинного; оценивая его на-глаз, мы ошибемся вдвое, если не больше. Во-вторых, ошибки легко возможны, когда определяется расстояние до такого предмета, основание которого заслонено железнодорожной насыпью, холмиком, зданием, вообще каким-нибудь возвышением. В таких случаях мы невольно считаем предмет находящимся не *позади* возвышения, а *на нем* самом, и, следовательно, делаем ошибку опять-таки в сторону уменьшения определяемого расстояния (рис. 95).

В подобных случаях полагаться на глазомер опасно, и приходится прибегать к другим приемам оценки расстояния, о которых мы уже говорили и еще будем говорить.

УКЛОНЫ

Вдоль железнодорожного полотна, кроме верстовых (точнее — километровых) столбов, вы видите еще и другие невысокие столбы с непонятными для многих надписями на косо прибитых дощечках, в роде таких:

$$\boxed{\frac{0{,}002}{140}} \qquad \boxed{\frac{0{,}006}{55}}$$



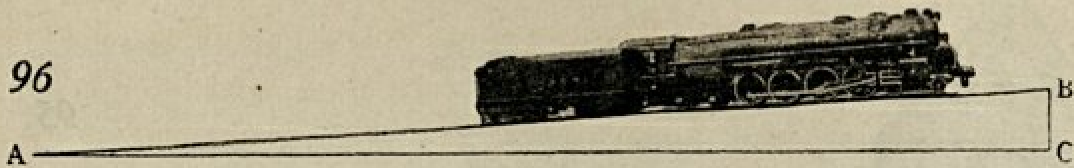
95

Это — „уклонные знаки". В первой, например, надписи верхнее число 0,002 означает, что уклон пути здесь (в какую сторону — показывает положение дощечки) равен 0,002: путь поднимается или опускается на 2 *мм* при каждой тысяче миллиметров. А нижнее число 140 показывает, что такой уклон идет на протяжении 140 *м*, где поставлен другой знак с обозначением нового уклона. (Когда дороги не были еще переустроены по метрической системе мер, такая дощечка означала, что на протяжении 140 сажен путь поднимается или опускается каждую сажень на 0,002 сажени). Вторая дощечка с надписью $\frac{0{,}006}{55}$ показывает, что на протяжении ближайших 55 *м* путь поднимается или опускается на 6 *мм* при каждом метре.

Зная смысл знаков уклона, вы легко можете вычислить разность высот двух соседних точек пути, отмеченных этими знаками. В первом случае, например, разность высот составляет $0{,}002 \times 140 = 0{,}28$ *м*; во втором — $0{,}006 \times 55 = 0{,}33$ *м*.

В железнодорожной практике, как видите, величина наклона пути определяется не в градусной мере. Однако, легко перевести эти путевые обозначения уклона в градусные. Если AB есть линия пути, а BC — разность высот точек A и B, то наклон линии пути AB к горизонтальной линии AC будет на столбике обозначен отношением

96



$\frac{BC}{AB}$. Так как угол A очень мал, то можно принять AB и AC за радиусы окружности, дуга которой есть BC.[1] Тогда вычисление угла A, если известно отношение $BC : AB$, не составит труда. При наклоне, например, обозначенном 0,002, рассуждаем так: при длине дуги, равной $\frac{1}{57}$ радиуса, угол составляет 1° (см. стр. 101); какой же угол соответствует дуге в 0,002 радиуса? Находим его величину x из пропорции:

$$x : 1^\circ = 0{,}002 : \frac{1}{57}, \text{ откуда } x = 0{,}002 \times 57 = 0{,}11^\circ,$$

т. е. около 7′.

На железнодорожных путях допускаются лишь весьма малые уклоны. У нас установлен предельный уклон в 0,008, т. е. в градусной мере $0{,}008 \times 57$ — менее $^1/_2{}^\circ$: это наибольший уклон. Только для Закавказской железной дороги допускаются, в виде исключения, уклоны до 0,025, соответствующие в градусной мере почти $1^1/_2{}^\circ$.

---

[1] Иному читателю покажется, быть может, недопустимым считать наклонную AB равною перпендикуляру AC. Поучительно поэтому убедиться, как мала разница в длине AC и AB, когда BC составляет, например, 0,01 от AB. По теореме Пифагора имеем

$$\overline{AC}^2 = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}9999\ AB^2} = 0{,}99995\ AB.$$

Разница в длине составляет всего 0,00005. Для приближенных вычислений подобной ошибкой можно, конечно, пренебречь.

Столь незначительные уклоны совершенно не замечаются нами. Пешеход начинает ощущать наклон почвы под своими ногами лишь тогда, когда он превышает $^1/_{24}$: это отвечает в градусной мере $\frac{57^\circ}{24}$, т. е. около $2^1/_2{}^\circ$.

Пройдя по железнодорожному пути несколько километров и записав замеченные при этом знаки уклона, вы сможете вычислить, насколько, в общей сложности, вы поднялись или опустились, т. е. какова разность высот между начальными и конечными пунктами.

Задача № 27

Вы начали прогулку вдоль полотна железной дороги у столбика с знаком подъема $\frac{0{,}004}{153}$ и встретили далее следующие знаки:

площадка[1] $\frac{0{,}000}{60}$, подъем $\frac{0{,}0017}{84}$, подъем $\frac{0{,}0032}{121}$, площадка $\frac{0{,}000}{45}$, падение $\frac{0{,}004}{210}$.

Прогулку вы кончили у очередного знака уклона. Какой путь вы прошли и какова разность высот между первым и последним знаками?

Решение

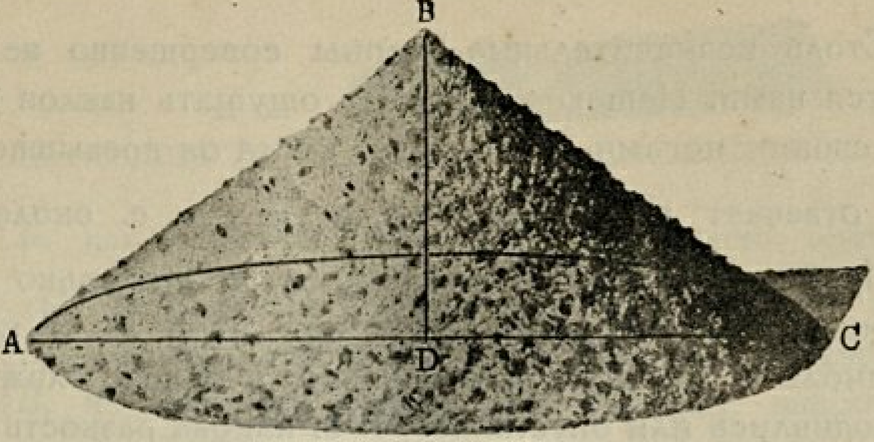
Всего пройдено

$$153+60+84+121+45+210=673 \textit{ м.}$$

Вы поднялись на

$$0{,}004\times153+0{,}0017\times84+0{,}0032\times121=1{,}15 \textit{ м,}$$

[1] Знак 0,000 означает горизонтальный участок пути („площадку“).



97

а опустились на

$$0{,}004 \times 210 = 0{,}84\ м,$$

значит, в общей сложности, оказались выше исходной точки на

$$1{,}15 - 0{,}84 = 0{,}31 м = 31\ см.$$

КУЧИ ЩЕБНЯ

Кучи щебня по краям шоссейной дороги также представляют предмет, заслуживающий внимания „геометра на вольном воздухе". Задайте вопрос, какой объем заключает лежащая перед вами куча,—и вы поставите себе геометрическую задачу, довольно замысловатую для человека, привыкшего преодолевать математические трудности только на бумаге или на классной доске. Придется вычислить объем конуса, высота и радиус которого недоступны для непосредственного измерения. Ничто не мешает, однако, определить их величину косвенным образом. Радиус вы найдете, измерив рулеткой или шнуром окружность основания и разделив[1] ее длину на 6,28.

[1] На практике это действие заменяют **умножением** на обратное число 0,318, если ищут диаметр, и на 0,159 — если желают вычислить радиус.

Сложнее обстоит с высотой: приходится (рис. 97) измерять длину образующей AB — или, как делают дорожные десятники, обеих образующих ABC сразу (перекидывая мерную ленту через вершину кучи), а затем, зная радиус основания, вычисляют высоту BD по теореме Пифагора. Рассмотрим пример.

Задача № 28

Окружность основания конической кучи щебня 12,1 *м*; длина двух образующих 4,6 *м*. Каков объем кучи?

Решение

Радиус основания кучи равен

$$12{,}1 \times 0{,}159 \text{ (вместо } 12{,}1 : 6{,}28) = 1{,}9 \textit{ м}.$$

Высота равна:

$$\sqrt{2{,}3^2 - 1{,}9^2} = 1{,}2 \textit{ м},$$

откуда объем кучи:

$$\frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 1{,}9^2 \times 1{,}2 = 4{,}5 \textit{ куб. м}$$

(или в прежних мерах около $\frac{1}{2}$ куб. сажени).

Обычные объемные размеры куч щебня на наших дорогах, согласно прежним дорожным правилам, были равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ куб. сажени, т. е. в метрических мерах 4,8, 2,4 и 1,2 *куб. м*.

„ГОРДЫЙ ХОЛМ"

При взгляде на конические кучи щебня или песку, мне вспоминается старинная легенда восточных народов, рассказанная у Пушкина в „Скупом рыцаре":

> Читал я где-то,
> Что царь однажды воинам своим
> Велел снести земли по горсти в кучу, —
> И гордый холм возвысился,
> И царь мог с высоты с весельем озирать
> И дол, покрытый белыми шатрами,
> И море, где бежали корабли.

Это одна из тех немногих легенд, в которых, при кажущемся правдоподобии, нет и зерна правды. Можно доказать геометрическим расчетом, что если бы какой-нибудь древний деспот вздумал осуществить такого рода затею, он был бы обескуражен мизерностью результата: перед ним высилась бы настолько жалкая кучка земли, что никакая фантазия не в силах была бы раздуть ее в легендарный „гордый холм".

Сделаем примерный расчет. Сколько воинов могло быть у древнего царя? Старинные армии были не так многочисленны, как в наше время. Войско в 100 000 человек было уже очень внушительно по численности. Остановимся на этом числе, т. е. примем, что холм составился из 100 000 горстей. Захватите самую большую горсть земли и насыпьте в стакан: вы не наполните его одною горстью. Мы примем, что горсть древнего воина равнялась по объему $\frac{1}{5}$ *л* (*куб. дм*). Отсюда определится объем холма:

$$\frac{1}{5} \times 100\,000 = 20000 \text{ куб. дм} = 20 \text{ куб. м.}$$

Значит, холм представлял собою конус, объемом не более 20 *куб. м.* Такой скромный объем уже разочаровывает. Но будем продолжать вычисления, чтобы определить высоту холма. Для этого нужно знать, какой угол составляют образующие конуса с его основанием. В нашем случае можем принять его равным углу естественного откоса, т. е. 45°: более крутых склонов нельзя, допустить, так как земля будет осыпаться (правдоподобнее было бы взять даже более пологий уклон, например, полуторный). Остановившись на угле в 45°, заключаем что высота такого конуса равна радиусу его основания; следовательно,

$$20=\frac{\pi x^3}{3},$$

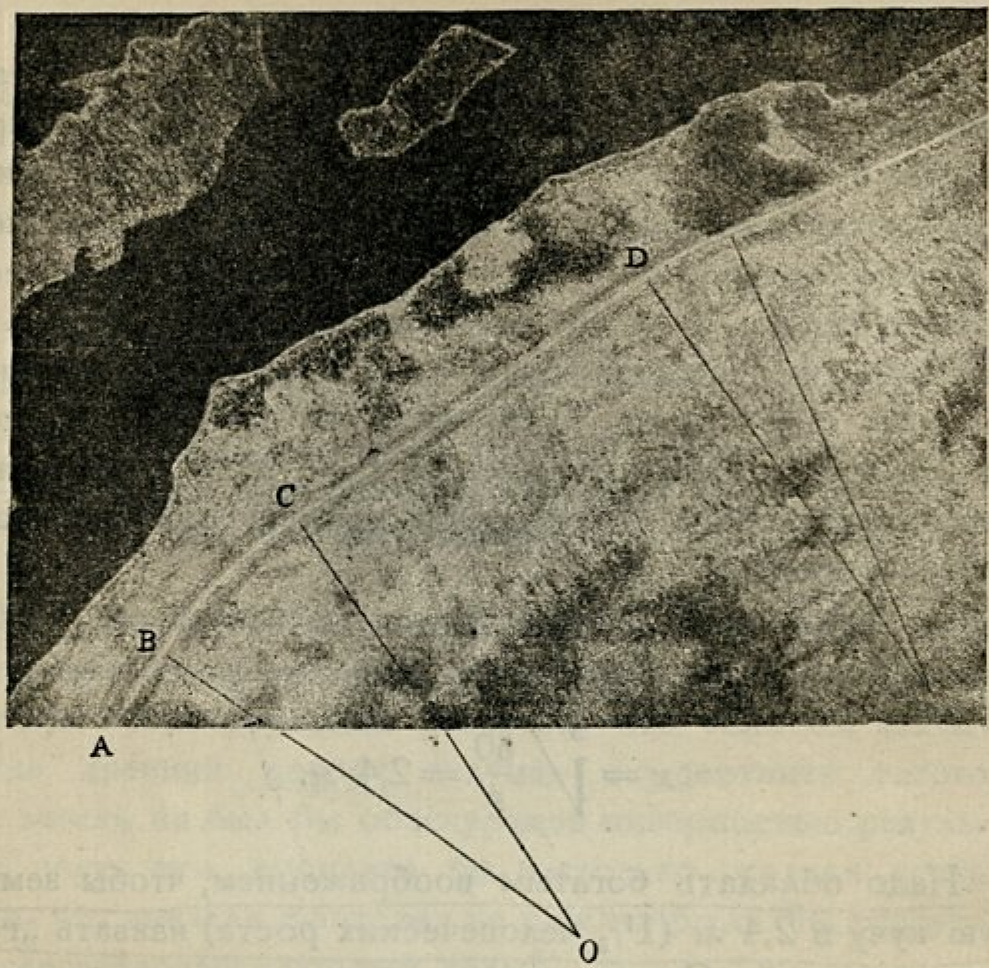
откуда

$$x=\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}=2{,}4\ \textit{м.}$$

Надо обладать богатым воображением, чтобы земляную кучу в 2,4 *м* ($1^1/_2$ человеческих роста) назвать „гордым холмом". Сделав расчет для случая полуторного откоса, мы получили бы еще более скромный результат.

У Атиллы было самое многочисленное войско, какое знал древний мир. Историки оценивают его в 700 000 человек. Если бы все эти воины участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень: так как объем ее был бы в 7 раз больше, чем нашей, то высота превышала бы высоту нашей кучи всего в $\sqrt[3]{7}$, т. е. в 1,9 раза: она равнялась бы $2{,}4\times1{,}9=$ $=4{,}6$ *м.* Сомнительно, чтобы курган подобных размеров мог удовлетворить честолюбие Атиллы.

С таких небольших возвышений легко было, конечно, видеть „дол, покрытый белыми шатрами", но обозревать



98

море было возможно разве только, если дело происходило невдалеке от берега.

О том, как далеко можно видеть с той или иной высоты, мы побеседуем подробнее в следующей главе.

У ДОРОЖНОГО ЗАКРУГЛЕНИЯ

Ни шоссейная, ни железная дороги никогда не заворачивают круто, а переходят всегда с одного направления на другое плавной, без переломов, дугой. Дуга эта обычно есть часть окружности, расположенная так, что прямолинейные части дороги служат касательными к ней. Например, на рис. 98 прямые участки AB и CD дороги соединены дугою BC так, что AB и CD касаются (геометрически) этой дуги в точках B и C, т. е. AB составляет прямой угол с радиусом OB, а CD — такой же угол с радиусом OC. Делается это, конечно, для того, чтобы путь плавно переходил из прямого направления в кривую часть и обратно.

Радиус дорожного закругления обыкновенно берется весьма большой — на железных дорогах не менее 600 *м*; наиболее же обычный радиус закругления на главном жел.-дор. пути — 1000 и даже 2000 *м*.

РАДИУС ЗАКРУГЛЕНИЯ

Стоя близ одного из таких закруглений, могли ли бы вы определить величину его радиуса? Это не так легко, как найти радиус дуги, начерченной на бумаге. На чертеже дело просто: вы проводите две произвольные хорды и из середин их восставляете перпендикуляры: в точке их пересечения лежит, как известно, центр дуги; расстояние его от какой-либо точки кривой и есть искомая длина радиуса.

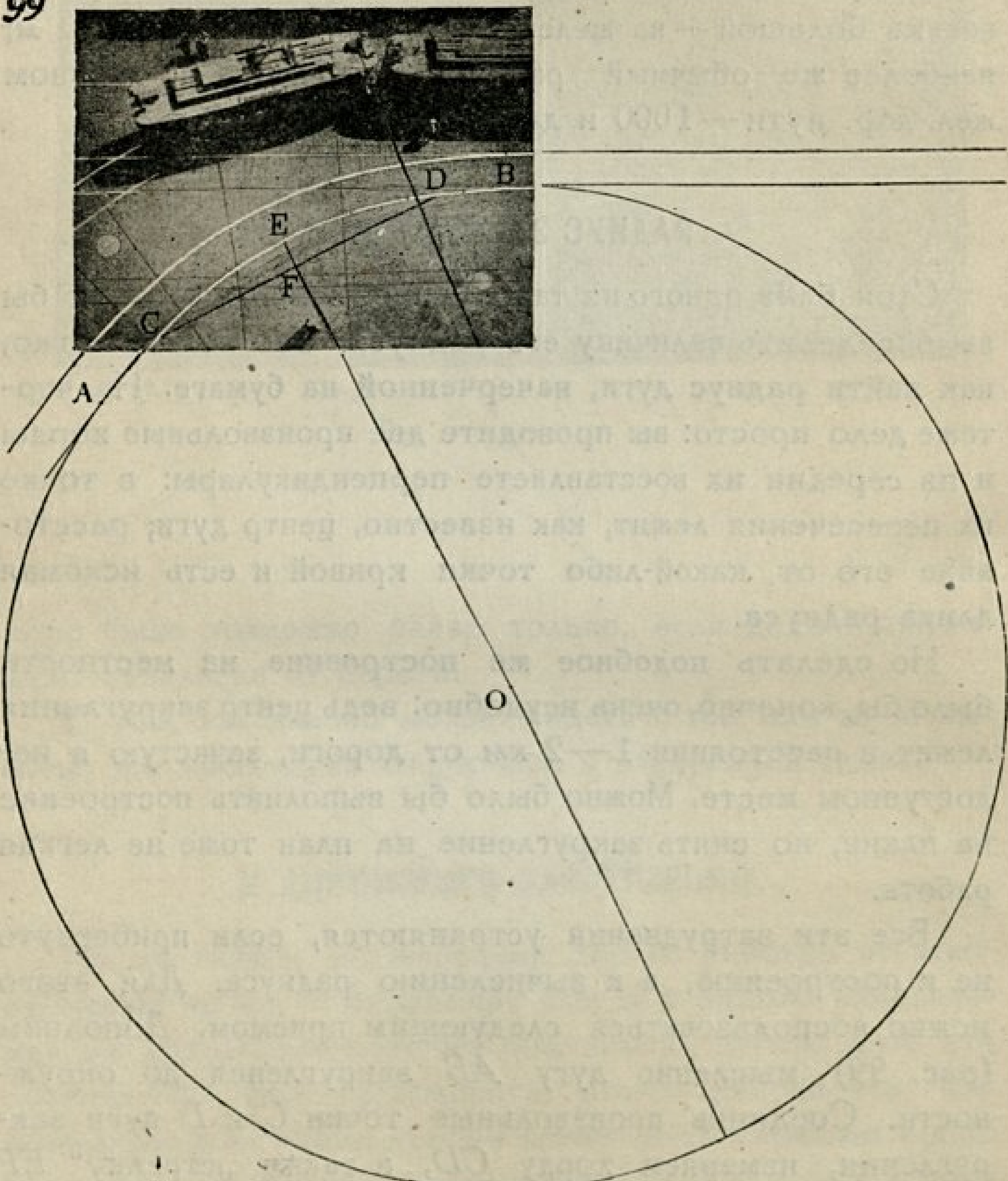
Но сделать подобное же построение на местности было бы, конечно, очень неудобно: ведь центр закругления лежит в расстоянии 1—2 *км* от дороги, зачастую в недоступном месте. Можно было бы выполнить построение на плане, но снять закругление на план тоже не легкая работа.

Все эти затруднения устраняются, если прибегнуть не к построению, а к вычислению радиуса. Для этого можно воспользоваться следующим приемом. Дополним (рис. 99) мысленно дугу AB закругления до окружности. Соединив произвольные точки C и D дуги закругления, измеряем хорду CD, а также „стрелку“ EF

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

(т. е. высоту сегмента CED). По этим двум данным уже нетрудно вычислить искомую длину радиуса. Рассматривая прямые CD и диаметр круга как пересекающиеся хорды, обозначим длину хорды через a, длину стрелки

99



через h, радиус — через R; имеем:

$$\frac{a^2}{4} = h\,(2R - h),$$

откуда

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2.$$

И искомый радиус[1]

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

Например, при стрелке в 0,5 *м* и хорде 48 *м* искомый радиус

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0{,}5^2}{8 \times 0{,}5} = 580 \text{ м}.$$

Это вычисление можно упростить, если считать $2R - h$ равным $2R$ — вольность позволительная, так как h весьма мало по сравнению с R (ведь R — сотни метров, а h — единицы их). Тогда получается весьма удобная для вычислений приближенная формула:

$$R = \frac{a^2}{8h}.$$

---

[1] То же могло быть получено и иным путем — из прямоугольного треугольника COF, где $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$; $OF = R - h$.

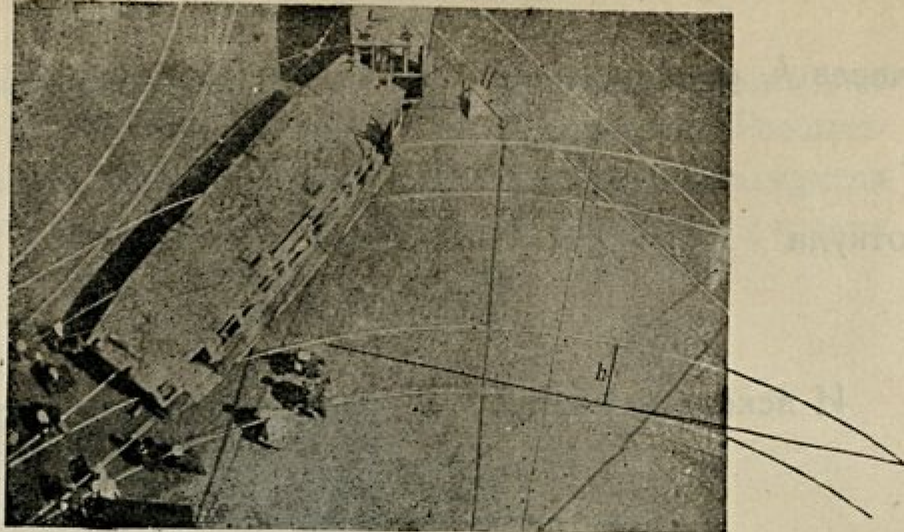
По теореме Пифагора,

$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$



100

Применив ее в сейчас рассмотренном случае, мы получили бы ту же величину:

$$R = 580.$$

Вычислив длину радиуса закругления и зная, кроме того, что центр закругления находится на перпендикуляре к середине хорды, вы можете приблизительно наметить и то место, где должен лежать центр кривой части дороги.

Если на дороге уложены рельсы, то нахождение радиуса закругления упрощается. В самом деле, натянув веревку по касательной к внутреннему рельсу, мы получаем хорду дуги наружного рельса, стрелка которой h (рис. 100) равна ширине колеи — 1,52 *м*. Радиус закругления в таком случае (если a — длина хорды) равен приближенно:

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1,52} = \frac{a^2}{12,2}.$$

При $a = 120$ *м* радиус закругления равен 1 200 *м*.[1]

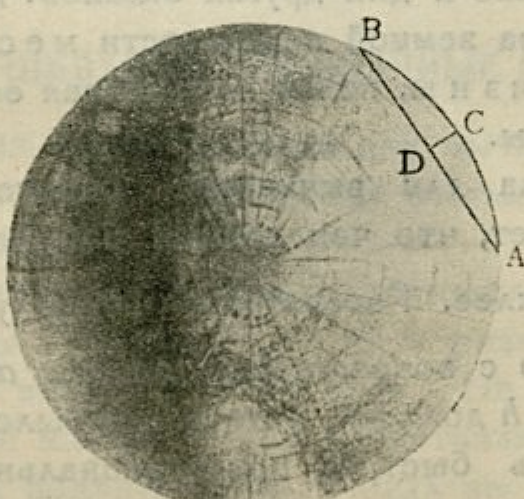
[1] На практике способ этот представляет то неудобство, что в виду большого радиуса закругления веревка для хорды требуется очень длинная

ДНО ОКЕАНА

От дорожного закругления к дну океана — скачок как будто слишком неожиданный, во всяком случае не сразу понятный. Но геометрия связывает обе темы вполне естественным образом.

Речь идет о кривизне дна океана, о том, какую форму оно имеет: вогнутую, плоскую или выпуклую. Многим, без сомнения, покажется невероятным, что океаны, при огромной своей глубине, вовсе не представляют на земном шаре впадин; как сейчас увидим, их дно не только не вогнуто, но даже выпукло. Считая океан „бездонным и безбрежным", мы забываем, что его „безбрежность" во много сотен раз больше его „бездонности" т. е., что водная толща океана представляет собою далеко простирающийся слой, который, конечно, повторяет кривизну нашей планеты.

Возьмем для примера Атлантический океан. Ширина его близ экватора составляет, примерно, шестую часть полной окружности. Если круг рис. 101 — экватор, то дуга *ACB* изображает водную скатерть Атлантического океана. Если бы дно его было плоско, то глубина равня-



101

лась бы CD = стрелке дуги ACB. Зная, что дуга $AB = \frac{1}{6}$ окружности, и, следовательно, хорда AB есть сторона правильного вписанного шестиугольника (которая, как известно, равна радиусу R круга), мы можем вычислить CD из выведенной раньше формулы для дорожных закруглений:

$$R = \frac{a^2}{8h}, \text{ откуда } h = \frac{a^2}{8R}.$$

Зная, что $a = R$, получаем для данного случая

$$h = \frac{R}{8}.$$

При $R = 6\,400$ *км* имеем:

$$h = 800 \text{ км}.$$

Итак, чтобы дно Атлантического океана было плоско, наибольшая глубина его должна была бы достигать 800 *км*. В действительности же она не достигает и 10 *км*. Отсюда прямой вывод: дно этого океана представляет, по общей своей форме, выпуклость, лишь немного менее искривленную, чем выпуклость его водной глади.

Это справедливо и для других океанов: дно их представляет собою на земной поверхности **места уменьшенной кривизны**, почти не нарушая ее общей шарообразной формы.

Наша формула для вычисления радиуса кривизны дороги показывает, что чем водный бассейн обширнее, тем дно его выпуклее. Рассматривая формулу $h = \frac{a^2}{8R}$, мы прямо видим, что с возрастанием ширины a океана или моря его глубина h должна, — чтобы дно было плоское, — возрастать очень быстро, пропорционально квадрату ширины a. Между тем, при переходе от небольших водных бассейнов к более обширным, глубина вовсе не возрастает в такой стремительной прогрессии. Океан шире иного моря, скажем, в 100 раз, но глубже его вовсе не в 100×100, т. е. в 10 000 раз. Поэтому сравнительно мелкие бассейны имеют дно более вдавленное, нежели океаны. Дно Черного моря между Крымом и Малой Азией не выпукло, как у океанов, даже и не плоско, а несколько вогнуто. Водная поверхность этого моря представляет дугу приблизительно в 2° (точнее в $^1/_{170}$ долю окружности Земли). Глубина Черного моря довольно равномерна и равна 2,2 *км*. Приравняв в данном случае дугу хорде, получаем, что для обладания плоским дном море это должно было бы иметь наибольшую глубину

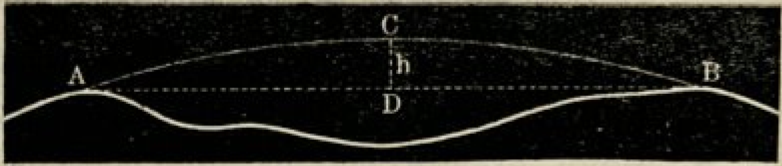
$$h = \frac{40\,000^2}{170^2 \times 8R} = 1{,}1 \text{ км.}$$

Значит, действительное дно Черного моря лежит более чем на километр (2,2 — 1,1) ниже воображаемой плоскости, проведенной через крайние точки его противоположных берегов, т. е. представляет собою **впадину**, а не выпуклость.

СУЩЕСТВУЮТ ЛИ ВОДЯНЫЕ ГОРЫ?

Выведенная ранее формула для вычисления радиуса кривизны дорожного закругления поможет нам ответить на этот вопрос.

Предыдущая задача уже подготовила нас к ответу. Водяные горы существуют, но не в физическом, а в геометрическом значении этих слов. Не только каждое море, но даже каждое озеро представляет собою в некотором роде водяную гору. Когда вы стоите у берега



102

озера, вас отделяет от противоположной точки берега водная выпуклость, высота которой тем больше, чем озеро шире. Высоту эту мы можем вычислить: из формулы $R = \frac{a^2}{8h}$ имеем величину стрелки $h = \frac{a^2}{8R}$; здесь a — расстояние между берегами по прямой линии, которое можем приравнять ширине озера (хорду — дуге). Если эта ширина, скажем, 100 *км*, то высота водяной „горы"

$$h = \frac{10\,000}{8 \times 6\,400} = \text{около } 200 \text{ м.}$$

Водяная гора внушительной высоты!

Даже небольшое озеро в 10 *км* ширины возвышает вершину своей выпуклости над прямой линией, соединяющей ее берега, на 2 *м*, т. е. выше человеческого роста.

Но в праве ли мы называть эти водные выпуклости „горами"? В физическом смысле нет: они не поднимаются над горизонтальной поверхностью, — значит, это равнины. Ошибочно думать, что прямая AB (рис. 102) есть горизонтальная линия, над которой поднимается дуга ACB. Горизонтальная линия здесь не AB, а ACB, совпадающая с свободной поверхностью спокойной воды. Прямая же ADB — наклонная к горизонту: AD уходит наклонно вниз под земную поверхность до точки D, ее глубочайшего пункта, и затем вновь поднимается вверх, выходя из-под земли (или воды) в точке B. Если бы вдоль прямой AB были проложены трубы, то шарик, помещенный в точке A, не удержался бы здесь, а (когда стенки трубы гладки) скатился бы до точки D и отсюда,

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

разогнавшись, вкатился бы к точке B; затем, не удержавшись здесь, скатился бы к D, добежал бы до A, снова скатился бы и т. д. Идеально гладкий шарик по идеально гладкой трубе (притом при отсутствии воздуха, мешающего движению) катался бы так туда и обратно вечно...

Итак, хотя глазу кажется на рис. 102, что ACB — гора, но в физическом значении слова здесь ровное место. Гора — если хотите — существует тут только в геометрическом смысле.

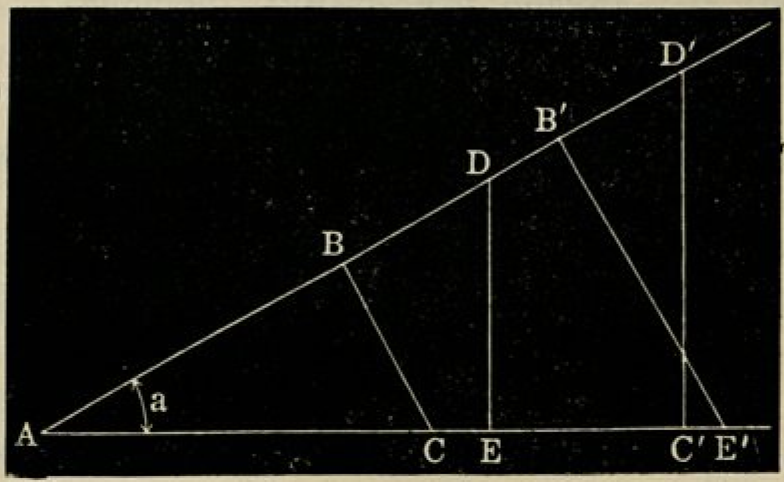
ГЛАВА ПЯТАЯ

ПОХОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ БЕЗ ФОРМУЛ И ТАБЛИЦ

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНУСА

В этой главе будет показано, как можно вычислять стороны треугольника с точностью до 2% и углы с точностью до 1°, пользуясь одним лишь понятием синуса и не прибегая ни к таблицам, ни к формулам. Такая упрощенная тригонометрия может пригодиться во время загородной прогулки, когда таблиц под рукой нет, а формулы полузабыты. Робинзон на своем острове мог бы успешно пользоваться такой тригонометрией.

Итак, вообразите, что вы еще не проходили тригонометрии или же забыли ее без остатка, — состояние, которое многим из читателей, вероятно, не трудно себе представить. Начнем знакомиться с ней сызнова. Что такое синус острого угла? Это — отношение противолежащего катета к гипотенузе в том треугольнике, который



103

отсекается от угла перпендикуляром к одной из его сторон. Например, синус угла a (рис. 103) есть $\frac{BC}{AC}$, или $\frac{DE}{AD}$, или $\frac{B'E'}{AE'}$, или $\frac{D'C'}{AD'}$. Легко видеть, что вследствие подобия образовавшихся здесь треугольников все эти отношения равны одно другому.

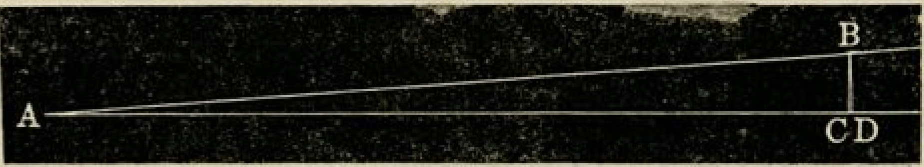
Чему же равны синусы различных углов от 1° до 90°? Как узнать это, не имея под рукой таблиц? Весьма просто: надо составить таблицу синусов самому. Этим мы сейчас и займемся.

Начнём с тех углов, синусы которых нам известны из геометрии. Это, прежде всего, угол в 90°, синус которого, очевидно, равен 1. Затем угол в 45°, синус которого легко вычислить по Пифагоровой теореме; он равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. 0,707. Далее, нам известен синус 30°: так как катет, лежащий против такого угла, равен половине гипотенузы, то синус $30° = \frac{1}{2}$.

Итак, мы знаем синусы (или, как принято обозначать, sin) трех углов:

$$\sin 30° = 0{,}5$$
$$\sin 45° = 0{,}707,$$
$$\sin 90° = 1.$$

Этого, конечно, недостаточно; необходимо знать синусы и всех промежуточных углов, по крайней мере, через каждый градус. Для очень малых углов можно при вычислении синуса вместо отношения катета к гипотенузе брать без большой погрешности отношение дуги к радиусу: из рис. 104 видно, что отношение $\frac{BC}{AB}$ мало отличается от отношения $\frac{BD}{AB}$. Последнее же легко вычи-



104

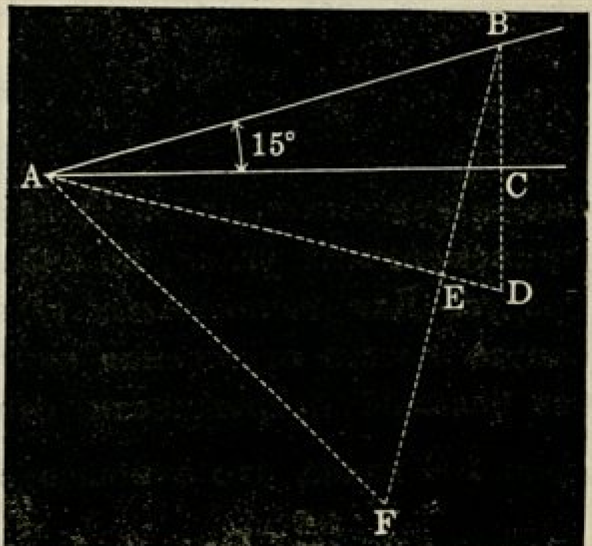
слить. Например, для угла в 1° дуга $BD = \frac{2\pi R}{360}$ и, следовательно, $\sin 1^\circ$ можно принять равным

$$\frac{2\pi R}{360\,R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

Таким же образом находим:

$$\sin 2^\circ = 0{,}0349,$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}0524,$$
$$\sin 4^\circ = 0{,}0698,$$
$$\sin 5^\circ = 0{,}0873.$$

Но надо убедиться, как далеко можно продолжать эту табличку, не делая большой погрешности. Если бы мы вычислили по такому способу $\sin 30^\circ$, то получили бы 0,524 вместо 0,500: разница была бы уже во второй значащей цифре, и погрешность составляла бы $\frac{24}{500}$, т. е.



105

около 5%. Это чересчур грубо даже для нетребовательной походной тригонометрии. Чтобы найти границу, до которой позволительно вести вычисление синусов по указанному приближенному способу, постараемся найти точным приемом sin 15°. Для этого воспользуемся следующим, несколько сложным, но не особенно замысловатым построением (рис. 105). $\sin 15° = \frac{BC}{AB}$. Продолжим BC на равное расстояние до точки D; соединим A с D; опустим перпендикуляр BE и, продолжив его на равное расстояние до F, соединим F с A. Так как угол BAF равен $4 \times 15°$, то-есть 60°, то в равнобедренном треугольнике BAF все углы равны 60°, и, следовательно, $BF = AB$, а $BE = \frac{AB}{2}$. Далее вычисляем AE из треугольника ABE по теореме Пифагора:

$$\overline{AE^2} = \overline{AB^2} - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\overline{AB^2};$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ \overline{AB}.$$

Значит, $ED = AD - AE = AB - 0{,}866\ \overline{AB} = 0{,}134\overline{AB}$. Теперь из треугольника BED вычисляем BD:

$$\overline{BD^2} = \overline{BE^2} + \overline{ED^2} = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\ \overline{AB})^2 = 0{,}268\,\overline{AB^2};$$

$$BD = \sqrt{0{,}268\,\overline{AB^2}} = 0{,}518\,\overline{AB}.$$

Половина BD, т. е. BC, равна 0,259 AB, следовательно, искомый синус

$$\sin 15° = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\ AB}{AB} = 0{,}259.$$

Это точное значение sin 15°, если ограничиться тремя знаками. Приближенное же значение его, которое мы нашли бы по прежнему способу, равно 0,262. Сопоставляя обозначения:

$$0{,}259 \text{ и } 0{,}262,$$

видим, что, ограничиваясь двумя значащими цифрами, мы получаем

$$0{,}26 \text{ и } 0{,}26,$$

т. е. тождественные результаты. Ошибка при замене более точного значения (0,259) приближенным (0,26) составляет $\frac{1}{259}$, т. е. около 0,4%. Это погрешность, позволительная для походных расчетов, и, следовательно, синусы углов от 1° до 15° мы в праве вычислять по нашему приближенному способу.

Для промежутка от 15° до 30° мы можем вычислять синусы помощью пропорций. Будем рассуждать так. Разница между sin 30° и sin 15° равна $0{,}50-0{,}26=0{,}24$. Значит, — можем мы допустить, — при увеличении угла на каждый градус синус его возрастает примерно на $^1/_{15}$ долю этой разницы, т. е. на $\frac{0{,}24}{15}=0{,}016$. Строго говоря, это, конечно, не так, но отступление от указанного правила обнаруживается только в третьей значащей цифре, которую мы все равно отбрасываем. Итак, прибавляя последовательно по 0,016 к sin 15°, получим синусы 16°, 17°, 18° и т. д.

$$\sin 16^\circ = 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28,$$
$$\sin 17^\circ = 0{,}26 + 0{,}032 = 0{,}29,$$
$$\sin 18^\circ = 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 25^\circ = 0{,}26 + 0{,}16 = 0{,}42 \text{ и т. п.}$$

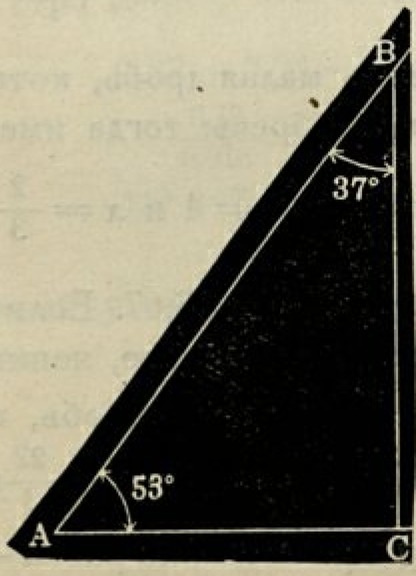
Все эти синусы верны в первых двух десятичных знаках, т. е. с достаточною для наших целей точностью:

они отличаются от истинных синусов менее чем на половину единицы последней цифры.

Таким же способом поступают при вычислении углов в промежутках между 30° и 45°. Разность $\sin 45° - \sin 30° = 0{,}707 - 0{,}5 = 0{,}207$. Разделив ее на 25, имеем 0,014. Эту величину будем прибавлять последовательно к синусу 30°; тогда получим

$$\sin 31° = 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51,$$
$$\sin 32° = 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 40° = 0{,}5 + 0{,}14 = 0{,}64 \text{ и т. п.}$$

Остается найти синусы острых углов больше 45°. В этом поможет нам Пифагорова теорема. Пусть, например, мы желаем найти sin 53°, т. е. (рис. 106) отношение $\frac{BC}{AB}$. Так как угол $B = 37°$, то синус его мы можем вычислить по предыдущему; он равен $0{,}5 + 7 \times 0{,}014 = 0{,}6$. С другой стороны, мы знаем, что $\sin B = \frac{AC}{AB}$. Итак, $\frac{AC}{AB} = 0{,}6$, откуда $AC = 0{,}6\ AB$. Зная AC, легко вычис-



106

лить BC. Этот отрезок равен

$$\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{\overline{AB}^2-(0,6\overline{AB})^2}=\overline{AB}\sqrt{1-0,36}=0,8\overline{AB}.$$

Расчет, в общем, не труден; надо только уметь вычислять квадратные корни.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Указываемый в курсах алгебры способ извлечения квадратных корней легко забывается. Но можно обойтись и без него. В учебных книгах моих по геометрии приведен древний упрощенный способ вычисления квадратных корней по способу деления. Здесь сообщу другой старинный способ, также более простой, нежели рассматриваемый в курсах алгебры.

Пусть надо вычислить $\sqrt{13}$. Он заключается между 3 и 4 и, следовательно, равен 3 с дробью, которую обозначим через x.

Итак,

$$\sqrt{13}=3+x, \text{ откуда } 13=9+6x+x^2.$$

Квадрат дроби x есть малая дробь, которою в первом приближении можно пренебречь; тогда имеем:

$$13=9+6x, \text{ откуда } 6x=4 \text{ и } x=\frac{2}{3}=0,67.$$

Значит, приближенно $\sqrt{13}=3,67$. Если мы хотим определить значение корня еще точнее, напишем уравнение $\sqrt{13}=3^2/_3+y$, где y — небольшая дробь, положительная или отрицательная. Отсюда $13=\frac{121}{9}+\frac{22}{3}y+y^2$. Отбросив y^2, находим, что y приближенно равен $-\frac{2}{33}=-0,06$.

Следовательно, во втором приближении $\sqrt{13}=3,67-0,06=3,61$. Третье приближение находим тем же приемом и т. д.

Обычным, указываемым в курсах алгебры способом мы нашли бы $\sqrt{13}$ с точностью до 0,01 — также 3,61.

НАЙТИ УГОЛ ПО СИНУСУ

Итак, мы имеем возможность вычислить синус любого угла от 0° до 90° с двумя десятичными знаками. Надобность в готовой таблице отпадает; для приближенных вычислений мы всегда можем сами составить ее, если пожелаем.

Но для решения тригонометрических задач нужно уметь и обратно — вычислять углы по данному синусу. Это тоже не сложно. Пусть требуется найти угол, синус которого $=0,38$. Так как данный синус меньше 0,5, то искомый угол меньше 30°. Но он больше 15°, так как sin 15°, мы знаем, равен 0,26. Чтобы найти этот угол, заключающийся в промежутке между 15° и 30°, поступаем как объяснено на стр. 154:

$$0,38-0,26=0,12$$
$$\frac{0,12}{0,016}=7,5^\circ$$
$$15^\circ+7,5^\circ=22,5^\circ.$$

Итак, искомый угол = около 22,5°.

Другой пример: найти угол, синус которого 0,62.

$$0,62-0,50=0,12$$
$$\frac{0,12}{0,014}=8,6^\circ$$
$$30^\circ+8,6^\circ=38,6^\circ$$

Искомый угол приближенно равен 38,6°.

Наконец, третий пример: найти угол, синус которого 0,91.

Так как данный синус заключается между 0,71 и 1, то искомый угол лежит в промежутке между 45° и 90°. На рис. 107 BC есть синус угла A, если $AB = 1$. Зная BC, легко найти синус угла B.

$$AC^2 = 1 - \overline{BC^2} = 1 - 0{,}91^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$

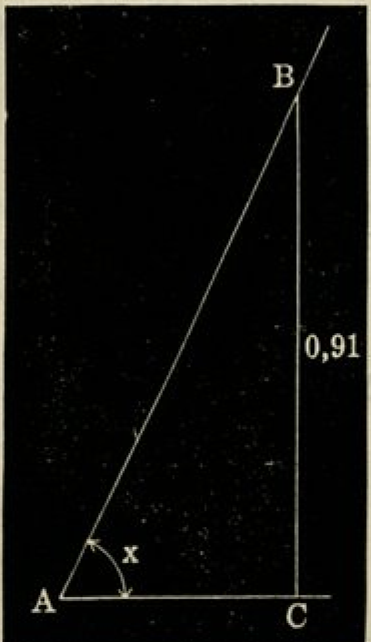
Теперь найдем величину угла B, синус которого $= 0{,}42$. после этого легко будет найти угол A, равный $90° - B$; Так как 0,42 заключается между 0,26 и 0,5, то угол B лежит в промежутке между 15° и 30°. Он определяется так:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16$$

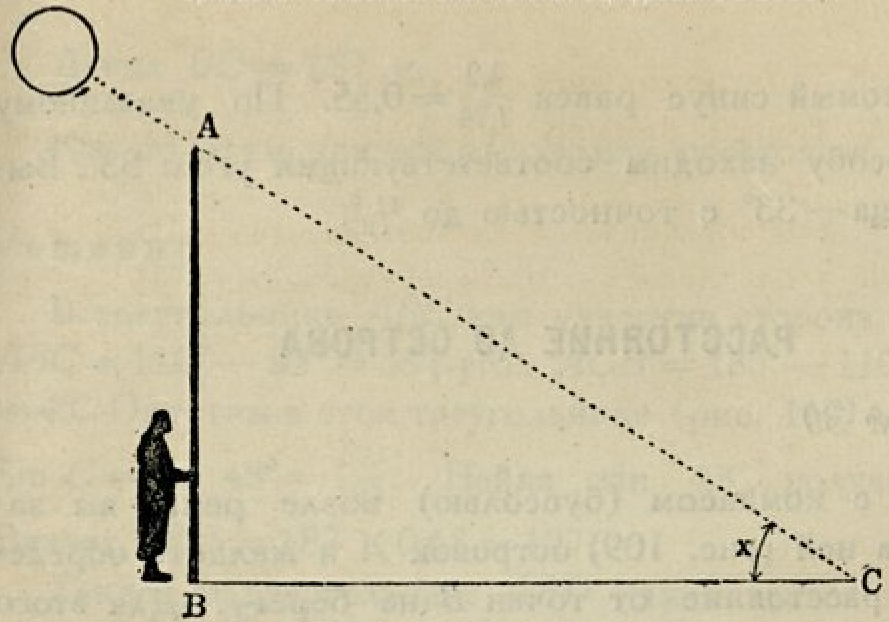
$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10°$$

$$B = 15° + 10° = 25°.$$

И, значит, угол $A = 90° - B = 90° - 25° = 65°$.



107



108

Мы вполне вооружены теперь для того, чтобы приближенно решать тригонометрические задачи, так как умеем находить синусы по углам и углы по синусам с точностью, достаточной для походных целей.

Но достаточно ли для этого одного только синуса? Разве не понадобятся нам остальные тригонометрические функции — косинус, тангенс и т. д.? Сейчас покажем на ряде примеров, что для нашей упрощенной тригонометрии можно вполне обойтись одним только синусом.

ВЫСОТА СОЛНЦА

Задача № 29

Тень BC (рис. 108) от отвесного шеста AB, высотою 4,2 *м*, имеет 6,5 *м* длины. Какова в этот момент высота солнца над горизонтом, т. е. как велик угол C?

Решение

Легко сообразить, что синус угла C равен $\frac{AB}{AC}$.

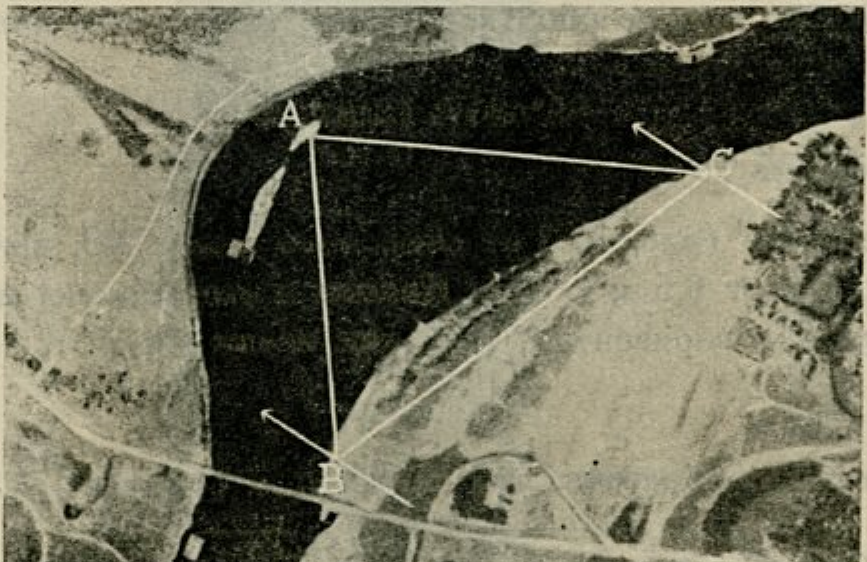
Но $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4,2^2+6,5^2}=7,74$. Поэтому искомый синус равен $\frac{4,2}{7,74} = 0,55$. По указанному ранее способу находим соответствующий угол: 33°. Высота солнца — 33° с точностью до $^1/_2$°.

РАССТОЯНИЕ ДО ОСТРОВА

Задача № 30

Бродя с компасом (буссолью) возле реки, вы заметили на ней (рис. 109) островок *A* и желаете определить его расстояние от точки *B* на берегу. Для этого вы определяете по компасу, какой угол составляет с направлением север — юг (*NS*) прямая *BA*. Затем измеряете прямую линию *BC* и определяете угол между нею и *NS*. Наконец, то же самое делаете в точке *C* для прямой *AC*. Допустим, что вы получили следующие данные:

направление	*BA*	отклоняется	от *NS*	к востоку	на 52°
„	*BC*	„	„ „	„	„ 110°
„	*CA*	„	„ „	западу	„ 27°



109

Длина $BC = 187$ *м.*

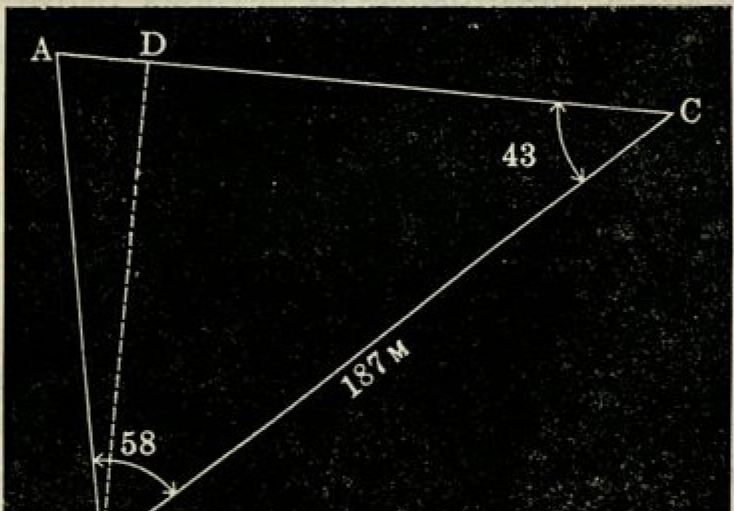
Как по этим данным вычислить расстояние BA?

Решение

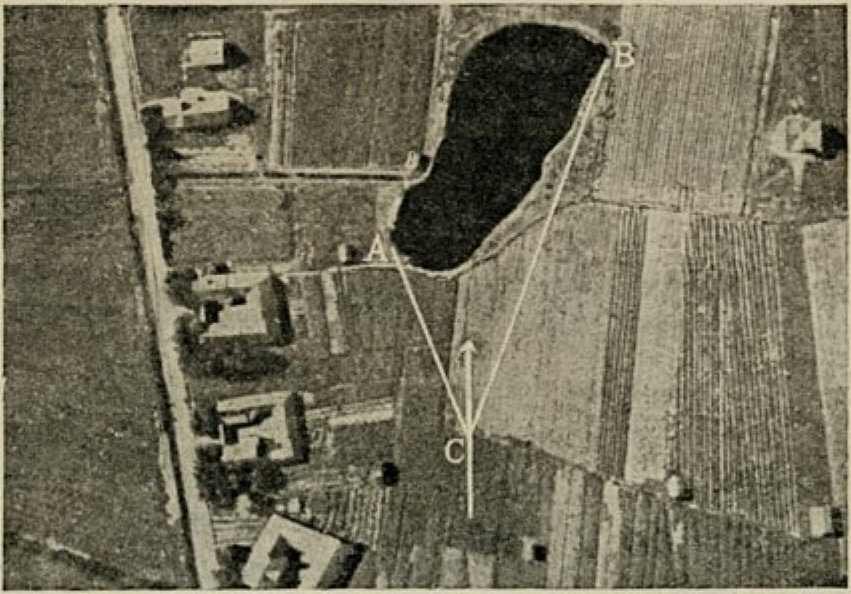
В треугольнике ABC нам известна сторона BC. Угол $ABC = 110° - 52° = 58°$; угол $ACB = 180° - 110° - 27° = 43°$. Опустим в этом треугольнике (рис. 110) высоту BD. Sin $C = \sin 43° = \frac{BD}{187}$. Найдя sin 43°, получаем 0,68. Значит, $BD = 187 \times 0{,}68 = 127$.

Теперь в треугольнике ABD нам известен катет BD; угол $A = 180° - (58° + 43°) = 79°$, и угол $ABD = 90° - 79 = 11°$. Синус 11° мы можем вычислить: он равен 0,19. Следовательно, $\frac{AD}{AB} = 0{,}19$. С другой стороны, по теореме Пифагора:

$$\overline{AB^2} = \overline{BD^2} + \overline{AD^2}.$$



110



111

Подставляя, вместо $\overline{AD}$, 0,19 $\overline{AB}$, а вместо $\overline{BD}$ — 127, имеем:

$$\overline{AB}^2 = 127^2 + (0{,}19\ \overline{AB}^2)^2.$$

откуда $AB = 128$.

Итак, искомое расстояние до острова около 128 *м*.

Читатель не затруднится, думаю, вычислить и сторону AC, если бы это понадобилось.

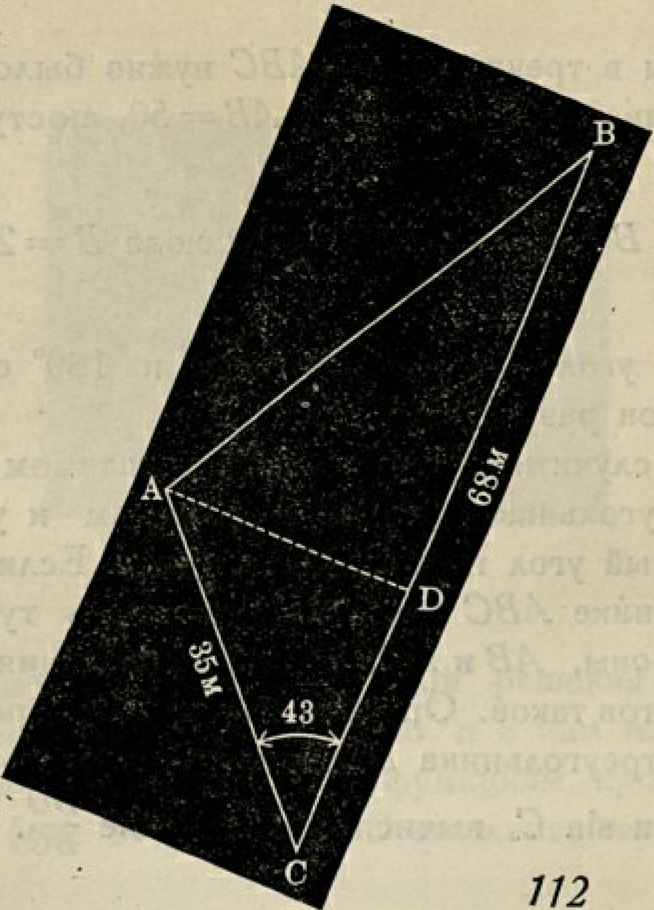
ШИРИНА ОЗЕРА

Задача № 31

Чтобы определить ширину AB озера (рис. 111), вы нашли по компасу, что прямая AC уклоняется к западу на 21°, а BC — к востоку на 22°. Длина $BC = 68$ *м*, $AC = 35$ *м*. Вычислить по этим данным ширину озера.

Решение

В треугольнике ABC нам известны угол 43° и длины заключающих его сторон — 68 *м* и 35 *м*. Опускаем (рис. 112)



112

высоту AD; имеем: $\sin 43^\circ = \frac{AD}{AC}$. Вычисляем, независимо от этого, $\sin 43^\circ$ и получаем 0,68. Значит, $\frac{AD}{AC} = 0{,}68$, $AD = 0{,}68 \times 35 = 24$. Затем вычисляем CD:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = 35^2 - 24^2 = 649;$$
$$CD = 25{,}5;$$
$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Теперь из треугольника ABD имеем:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380;$$
$$AB = 49$$

Итак, искомая ширина озера около 49 *м*.

Если бы в треугольнике ABC нужно было вычислить и другие два угла, то, найдя $AB = 50$, поступаем далее так:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0{,}49; \text{ отсюда } B = 29^\circ.$$

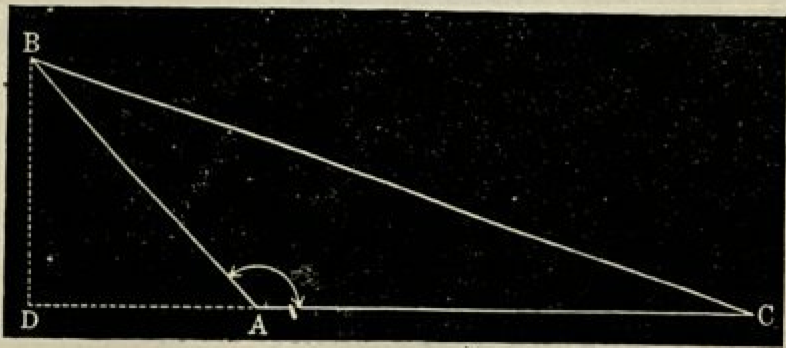
Третий угол C найдем, вычитая из 180° сумму углов 29° и 43°; он равен 108°.

Может случиться, что в рассматриваемом случае решения треугольника (по двум сторонам и углу между ними) данный угол не острый, а тупой. Если, например, в треугольнике ABC (рис. 112) известны тупой угол A и две стороны, AB и AC, то ход вычисления остальных его элементов таков. Опустив высоту BD, определяют BD и AD из треугольника BDA; затем, зная $DA + AC$, находят BC и $\sin C$, вычислив отношение $\frac{BD}{BC}$.

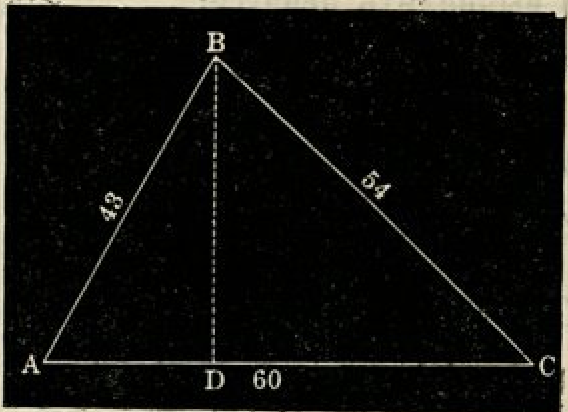
ТРЕУГОЛЬНЫЙ УЧАСТОК

Задача № 32

Во время экскурсии мы измерили шагами стороны треугольного участка и нашли, что они равны 43, 60 и 54 шагам. Каковы углы этого треугольника?



113



114

Решение

Это — наиболее сложный случай решения треугольника: по трем сторонам. Однако и с ним можно справиться, не обращаясь к другим функциям, кроме синуса.

Опустив (рис 114) высоту BD на длиннейшую сторону AC, имеем:

$$BD^2 = 43^2 - \overline{AD}^2$$
$$BD^2 = 54^2 - \overline{DC}^2,$$

откуда:

$$43^2 - \overline{AD}^2 = 54^2 - \overline{DC}^2$$
$$\overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 = 54^2 - 43^2 = 1070.$$

Но $\overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 = (DC + AD)\ (DC - AD) = 60\ (DC - AD).$

Следовательно:

$$60\ (DC - AD) = 1070 \text{ и } DC - AD = 17{,}8.$$

Из двух уравнений

$$DC - AD = 17{,}8 \text{ и } DC + AD = 60$$

получаем

$$2DC = 77{,}8, \text{ т. е. } DC = 38{,}9.$$

Теперь легко вычислить высоту:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4,$$

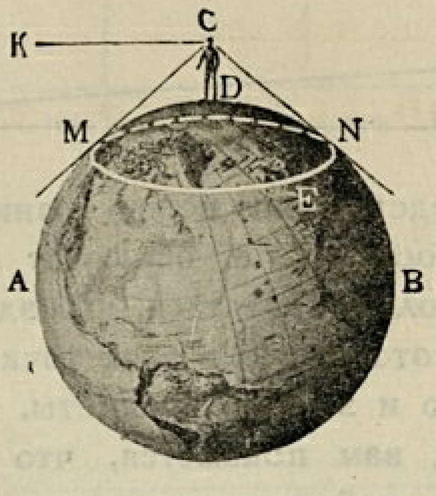
откуда находим

$$\sin\ A = \frac{BD}{AB} = \frac{37.4}{43} = 0{,}87;\ A = \text{около}\ 60°.$$

$$\sin\ C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69;\ C = \text{около}\ 44°.$$

Третий угол $B = 180 - (A + C) = 76°$.

Если бы мы в данном случае вычисляли помощью таблиц, по всем правилам „настоящей“ тригонометрии, то получили бы углы, выраженные в градусах и минутах. Но эти минуты были бы заведомо ошибочны, так как стороны, измеренные шагами, заключают погрешность не менее 2—3%. Значит, чтобы не обманывать самого себя, следовало бы полученные точные величины углов округлить, по крайней мере, до целых градусов. И тогда у нас получился бы тот же самый результат, к которому мы пришли, прибегнув к упрощенным приемам. Польза нашей „походной“ тригонометрии выступает здесь очень наглядно.



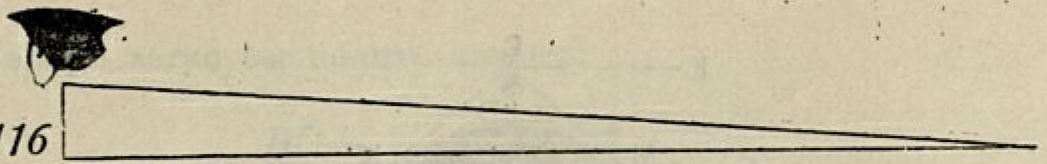
115

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ГДЕ НЕБО С ЗЕМЛЕЙ СХОДИТСЯ

ГОРИЗОНТ

В степи или на ровном поле вы видите себя в центре окружности, которая ограничивает доступную вашему глазу земную поверхность. Это — горизонт. Линия горизонта неуловима: когда вы идете к ней, она от вас отодвигается. Но, неуловимая, она все же реально существует; это не обман зрения, не мираж. Для каждой точки наблюдения имеется определенная граница видимой из нее земной поверхности, и дальность этой границы нетрудно вычислить. Чтобы уяснить себе геометрические отношения, связанные с горизонтом, обратимся к верхнему рисунку. Дуга AB — часть окружности земного шара. В точке C помещается глаз наблюдателя на высоте CD над земной поверхностью. Как далеко видит кругом себя на ровном месте этот наблюдатель? Очевидно, только до точек M, N, где луч зрения касается земной поверхности: дальше земля лежит ниже луча зрения. Эти точки M, N (и другие, лежащие на окруж-

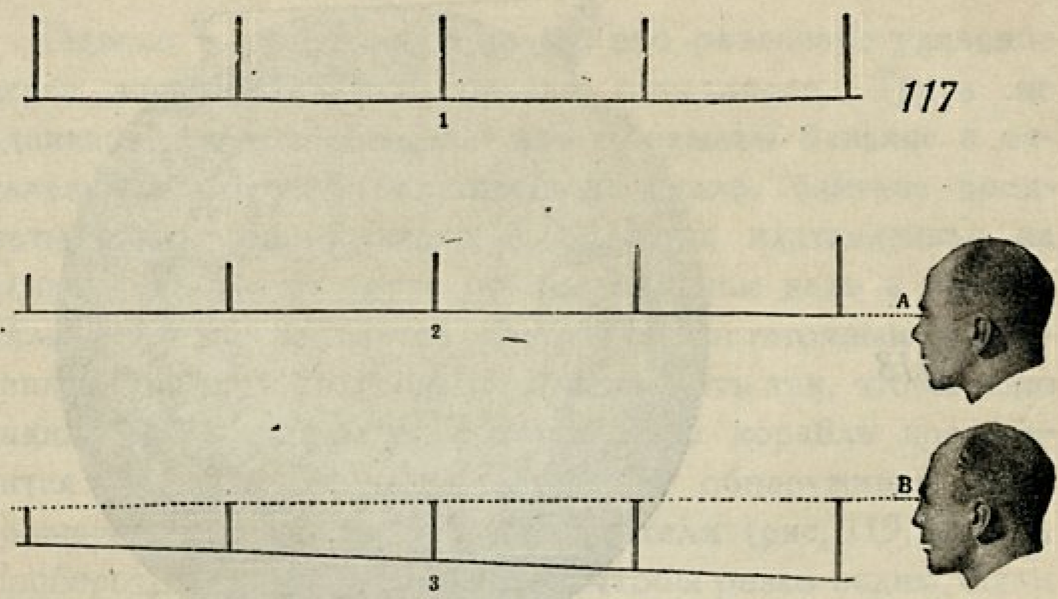


116

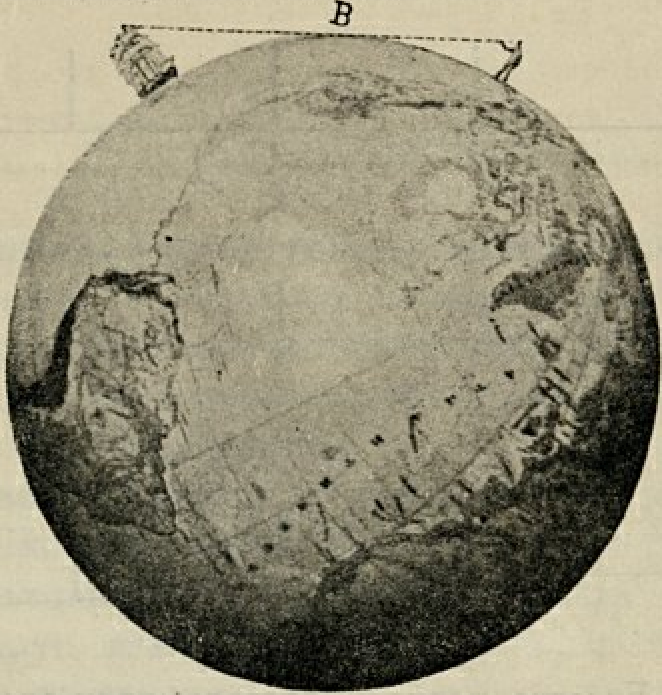
ности MEN) представляют собою границу видимой части земной поверхности, т. е. образуют линию горизонта. Наблюдателю должно казаться, что здесь небо опирается на землю, потому что в этих точках он видит одновременно и небо и земные предметы.

Быть может, вам покажется, что рис. 115 не дает верной картины действительности: ведь на самом деле горизонт всегда находится на уровне глаз, между тем как на рисунке круг явно лежит ниже наблюдателя. Действительно, нам всегда кажется, что линия горизонта расположена на одном уровне с глазами и даже повышается вместе с нами, когда мы поднимаемся. Но это — обман зрения: на самом деле линия горизонта всегда ниже глаз, как и показано на рис. 116. Но угол, составляемый прямыми линиями CN и CM с прямой CK, перпендикулярной к радиусу в точке C (этот угол называется „понижением горизонта"), весьма мал, и уловить его без инструмента невозможно.

Отметим попутно и другое любопытное обстоятельство. Мы сказали сейчас, что при поднятии наблюдателя над земной поверхностью, например на аэроплане, линия горизонта кажется остающейся на уровне глаз, т. е. как бы поднимается вместе с наблюдателем. Если он достаточно высоко поднимается, ему будет казаться, что почва под аэропланом лежит ниже линии горизонта, — другими словами, земля представится словно вдавленной в форме чаши, краями которой служит линия горизонта. Это очень хорошо описано и объяснено у Эдгарда По в фантастическом „Приключении Ганса Пфаля".



„Больше всего, — рассказывает его герой-аэронавт, — удивило меня то обстоятельство, что поверхность земного шара казалась **вогнутой**. Я ожидал, что увижу ее непременно выпуклой во время подъема кверху; только путем размышления нашел я объяснение этому явлению. Отвесная линия, проведенная от моего шара к земле, образовала бы катет прямоугольного треугольника, основанием которого была бы линия от основания отвеса до горизонта, а гипотенузой — линия от горизонта до моего шара. Но моя высота была ничтожна по сравнению с полем зрения: другими словами, основание и гипотенуза воображаемого прямоугольного треугольника были так велики по сравнению с отвесным катетом, что их можно было считать почти параллельными. Поэтому каждая точка, находящаяся как раз под аэронавтом, всегда кажется лежащей ниже уровня горизонта. Отсюда впечатление вогнутости. И это должно продолжаться до тех пор, пока высота подъема не станет настолько значительной, что основание треугольника и гипотенуза перестанут казаться параллельными“.



118

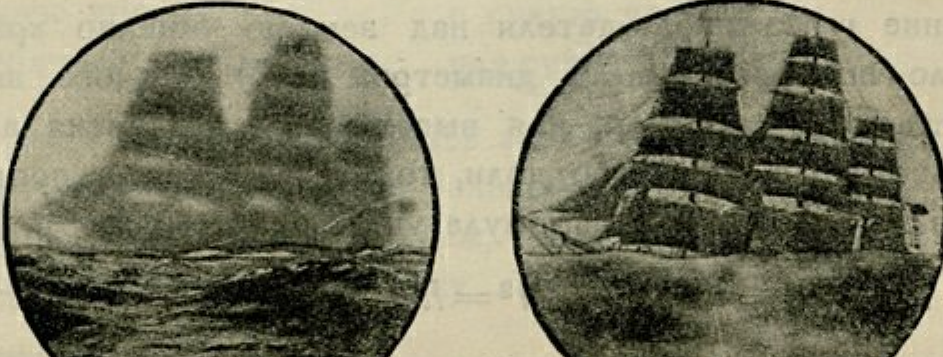
В дополнение к этому объяснению добавим следующий пример. Вообразите прямой ряд телеграфных столбов (рис. 117, *1*). Для глаза, помещенного в точке *B*, на уровне оснований столбов, ряд принимает вид, обозначенный цифрой *2*. Но для глаза в точке *A*, на уровне вершин столбов, ряд принимает вид *3*, т. е. почва кажется ему словно приподнимающейся у горизонта

КОРАБЛЬ НА ГОРИЗОНТЕ

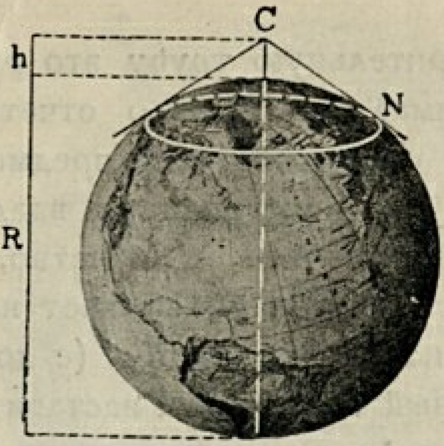
Когда с берега моря или большого озера мы наблюдаем за кораблем, появляющимся из-под горизонта, нам кажется, что мы видим судно не в той точке (рис. 118), где оно действительно находится, а гораздо ближе, в точке *B*, где линия нашего зрения скользит по выпуклости моря. При наблюдении невооруженным глазом трудно отделаться от впечатления, что судно находится в точке *B*, а не дальше за горизонтом (ср. со сказанным на стр. 132).

Однако в зрительную трубу это различное удаление судна воспринимается гораздо отчетливее. Труба не одинаково ясно показывает нам предметы близкие и отдаленные: в трубу, наставленную вдаль, близкие предметы видны расплывчато, и, обратно, наставленная на близкие предметы труба показывает нам даль в тумане. Если поэтому направить трубу (с достаточным увеличением) на водный горизонт и наставить так, чтобы ясно видна была водная поверхность, то корабль представится в расплывчатых очертаниях, обнаруживая свою большую отдаленность от наблюдателя (рис. 119, слева). Наоборот, установив трубу так, чтобы резко видны были очертания корабля, полускрытого под горизонтом, мы заметим, что водная поверхность у горизонта утратила свою прежнюю ясность и рисуется словно в тумана (рис. 119, справа). Английский астроном Проктор, подметивший это поучительное явление, говорит по его поводу:

„Все, кому случалось произвести такое наблюдение, единогласно утверждали, что, как ни крепка была их уверенность в шарообразности Земли, они нашли в этом наблюдении убедительнейшее подтверждение этой истины“.



119



120

ДАЛЬНОСТЬ ГОРИЗОНТА

Как же далеко лежит от наблюдателя линия горизонта? Другими словами: как велик радиус того круга, в центре которого мы видим себя на ровной местности? Как вычислить дальность горизонта, зная величину возвышения наблюдателя над земной поверхностью?

Задача сводится к вычислению длины отрезка CN (рис. 120) касательной, проведенной из глаза наблюдателя к земной поверхности. Квадрат касательной, — мы, знаем из геометрии, — равен произведению внешнего отрезка h секущей на всю длину этой секущей, т. е. на $h+2R$, где R — радиус земного шара. Так как возвышение глаза наблюдателя над землею обычно крайне мало по сравнению с диаметром $(2R)$ земного шара, составляя, например, для высочайшего поднятия аэроплана около 0,001 его доли, то $2R+h$ можно принять равным $2R$, и тогда формула упростится:

$$\overline{CN}^2 = h \cdot 2R.$$

Значит, дальность горизонта можно вычислять по очень простой формуле:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

где R — радиус земного шара (около 6400 *км*), а h — возвышение глаза наблюдателя над земной поверхностью. Так как $\sqrt{6400}=80$, то формуле можно придать вид:

$$\text{дальность горизонта} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

где h непременно должно быть выражено в частях километра.

Это — расчет чисто геометрический, упрощенный. Если пожелаем уточнить его учетом физических факторов, влияющих на дальность горизонта, то должны принять в соображение так называемую „атмосферную рефракцию“. Рефракция, т. е. преломление (искривление) световых лучей в атмосфере, увеличивает дальность горизонта примерно на $^1/_{15}$ долю (на 6%). Число это — 6% — только среднее. Дальность горизонта несколько увеличивается или уменьшается в зависимости от многих условий, а именно, она

увеличивается:	уменьшается:
при высоком давлении	при низком давлении
близ поверхности земли	на высоте
в холодную погоду	в теплую погоду
утром и вечером	днем
в сырую погоду	в сухую погоду
над морем	над сушей.

В ряде приведенных далее задач влияние атмосферной рефракции в расчет (в большинстве случаев) не принимается. Нетрудно, впрочем, — как будет показано, — ввести и требуемую поправку.

Задача № 33

Как далеко может обозревать землю человек, стоящий на равнине?

Решение

Считая, что глаз взрослого человека возвышается над почвой на 1,6 *м*, или на 0,0016 *км*, имеем:

$$\text{дальность горизонта} = 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \textit{ км}.$$

Человек маленького роста видит на ровном месте не далее $4^1/_2$ *км*. Рефракция увеличивает эту дальность до 4,8 *км*. Поперечник обозреваемого им круга — всего 9,6 *км*, а площадь — 72 *кв. км*. Это гораздо меньше, чем обычно думают люди, описывающие далекий простор степей, окидываемый глазом.

Задача № 34

Как далеко видит море человек, сидящий в лодке?

Решение

Если возвышение глаза сидящего в лодке человека над уровнем воды примем за 1 *м*, или 0,001 *км*, то дальность горизонта равна

$$113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \textit{ км},$$

т. е. немного более $3^1/_2$ *км*. Предметы, расположенные далее, видны только в своих верхних частях; основания их скрыты под горизонтом.

При более низком положении глаза горизонт суживается: для полуметра, например, до $2^1/_2$ *км*. Напротив, при наблюдении с возвышенных пунктов (с мачты) дальность горизонта возрастает: для 4 *м*, например, до 7 *км*.

Задача № 35

Как далеко во все стороны простиралась земля для воздухоплавателей, наблюдавших из гондолы стратостата

„С-ОАХ-I“, когда он находился в высшей точки своего подъема?

Решение

Так как шар находился на высоте 22 *км*, то дальность горизонта для такого возвышения равна

$$113\sqrt{22} = 530 \text{ км}.$$

Задача № 36

Как высоко должен подняться летчик, чтобы видеть кругом себя на 50 *км*?

Решение

Из формулы дальности горизонта имеем в данном случае уравнение:

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

откуда

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12800} = 0{,}2 \text{ км}.$$

Значит, достаточно подняться всего на 200 *м*.

Все получаемые по указанной формуле результаты были бы вполне верны лишь в том случае, если бы земная атмосфера не влияла на прямолинейное распространение лучей света. В действительности, как было сказано выше, воздушная оболочка Земли искривляет путь лучей, вследствие чего горизонт отодвигается на 6% дальше того расстояния, которое получается из формулы. Эту поправку не трудно внести. Например, в задаче № 35 правильный ответ будет $530 \times 1{,}06 = 580$ *км*, а задачу № 36 нужно бы решить так: скинув 6% от 50 *км*, имеем 47 *км*; далее

$$h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12800} = 0{,}17 \text{ км},$$

т. е. 170 *м* (вместо 200).

БАШНЯ ГОГОЛЯ

Задача № 37

Интересно знать, что увеличивается быстрее: высота поднятия или дальность горизонта? Многие думают, что с возвышением наблюдателя горизонт возрастает необычайно быстро. Так думал, между прочим, и Гоголь, писавший в статье „Об архитектуре нашего времени" следующее:

„Башни огромные, колоссальные, необходимы в городе... У нас обыкновенно ограничиваются высотой, дающей возможность оглядеть один только город, между тем как для столицы необходимо видеть, по крайней мере, на полтораста верст во все стороны, и для этого, может быть, один только или два этажа лишних, — и все изменяется. Объем кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией".

Так ли в действительности?

Решение

Достаточно взглянуть на формулу

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

чтобы сразу стала ясна неправильность утверждения, будто „объем горизонта" с возвышением наблюдателя возрастает очень быстро. Напротив, дальность горизонта растет медленнее, чем высота поднятия: она пропорциональна квадратному корню из высоты. Когда возвышение наблюдателя увеличивается в 100 раз, горизонт отодвигается всего только в 10 раз дальше; когда высота становится в 1000 раз больше, горизонт отодвигается всего в 31 раз дальше. Поэтому ошибочно утверждать, что „один только или два этажа лишних, — и все изменяется". Если к 8-этажному дому пристроить еще два этажа, дальность горизонта возрастет в $\sqrt{\frac{10}{8}}$, т. е. в 1,1 раза — всего на 10%. Такая прибавка мало ощутительна.

Что же касается идеи сооружения башни, с которой можно было бы видеть, „по крайней мере, на полтораста верст", то она совершенно несбыточна. Гоголь, конечно, не подозревал, что такая башня должна иметь огромную высоту.

Действительно, из уравнения

$$150 = \sqrt{2Rh}$$

получаем:

$$h = \frac{150^2}{2R} = \frac{22\,500}{12\,000} = 1{,}9 \text{ версты.}$$

Самое высокое из всех сооруженных до нашего времени зданий — Эмпайр Стэйт в Нью-Иорке (381 *м*) — в 5 раз ниже этих проектируемых Гоголем вышек. А во времена Гоголя даже и Эйфелевой башни (300 *м*) еще не существовало!

ХОЛМ ПУШКИНА

Задача № 38

Сходную ошибку делает и Пушкин, говоря в „Скупом рыцаре" о далеком горизонте, открывающемся с вершины „гордого холма":

И царь мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли...

Мы уже видели, как скромна была высота этого „гордого" холма: даже полчища Атиллы не могли бы по этому способу воздвигнуть холма выше $4\frac{1}{2}$ *м*. Теперь мы можем завершить расчеты, определив, насколько холм этот расширял горизонт наблюдателя, поместившегося на его вершине. Глаз такого зрителя возвышался бы над почвой на $4\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}$, т. е. на 6 *м*, и, следовательно, дальность горизонта равна была бы $\sqrt{2 \times 6400 \times 0{,}006} = 8{,}8$ *км*. Это всего на 4 *км* больше того, что можно видеть, стоя на ровной земле.

ГДЕ РЕЛЬСЫ СХОДЯТСЯ?

Задача № 39

Конечно, вы не раз замечали, как суживается уходящая в даль рельсовая колея. Но случалось ли вам видеть ту точку, где оба рельса, наконец, встречаются друг с другом? Да и возможно ли видеть такую точку? У вас теперь достаточно знаний, чтобы решить эту задачу.

Решение

Вспомним, что каждый предмет превращается для нормального глаза в точку тогда, когда виден под углом в $1'$, т. е. когда он удален на 3400 своих поперечников. Ширина рельсовой колеи — 1,52 *м*. Значит, промежуток между рельсами должен слиться в точку на расстоянии $1{,}52 \times 3400 = 5{,}2$ *км*. Итак, если бы мы могли проследить за рельсами на протяжении 5,2 *км*, мы увидели бы, как оба они сходятся в одной точке. Но на ровной местности горизонт лежит ближе 5,2 *км*, — именно, на расстоянии всего 4,4 *км*. Следовательно, человек с нормальным зрением, стоя на ровном месте, не может видеть точку встречи рельсов. Он мог бы наблюдать ее лишь при одном из следующих условий:

1) если острота зрения его понижена, так что предметы сливаются для него в точку при угле зрения, большем $1'$;

2) если железнодорожный путь не горизонтален;

3) если глаз наблюдателя возвышается над землей более чем на

$$\frac{5{,}2^2}{2R}=\frac{27}{12\,800}=0{,}0021 \text{ км},$$

т. е. 210 *см*.

ЗАДАЧА О МАЯКЕ

Задача № 40

На берегу находится маяк, верхушка которого возвышается на 40 *м* над поверхностью воды.

С какого расстояния откроется этот маяк для корабля, если матрос-наблюдатель („марсовой") находится на „марсе" корабля на высоте 10 *м* над водной поверхностью?

Решение

Из рис. 121 видно, что задача сводится к вычислению длины прямой AC, составленной из двух частей AB и BC.

Часть AB есть дальность горизонта маяка, при высоте над землей 40 *м*, а BC — дальность горизонта „марсового" при высоте 10 *м*. Следовательно, искомое расстояние равно:

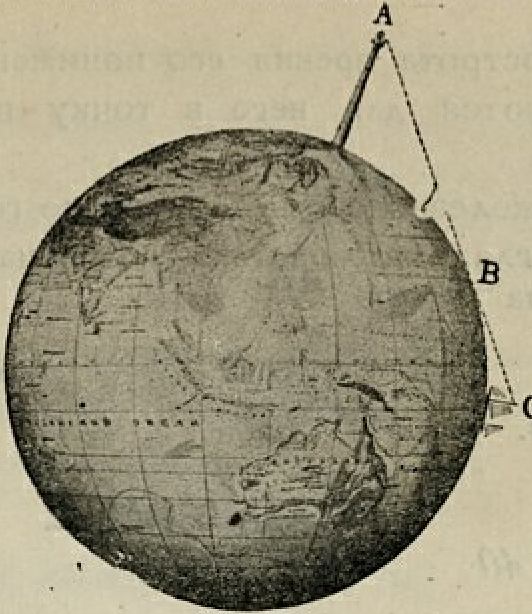
$$113\sqrt{0{,}04}+113\sqrt{0{,}01}=113(0{,}2+0{,}1)=34 \text{ км}.$$

Задача № 41

Какую часть этого маяка увидит тот же „марсовой" с расстояния 30 *км*?

Решение

Из рис. 122 ясен ход решения задачи: нужно прежде всего вычислить длину BC, затем отнять полученный



121

результат от общей длины AC, т. е. от 30 *км*, чтобы узнать расстояние AB. Зная AB, мы вычислим высоту, с которой дальность горизонта равна AB. Выполним же все эти расчеты:

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3 \text{ км};$$

$$30 - 11{,}3 = 18{,}7 \text{ км};$$

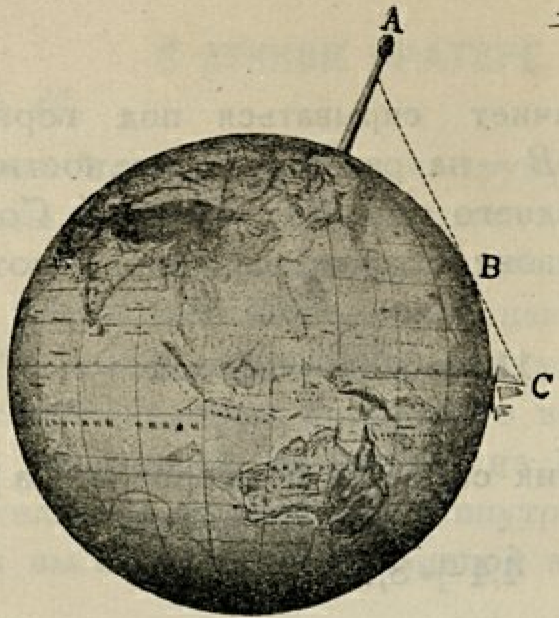
$$\text{высота} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12\,800} = 0{,}027 \text{ км}.$$

Значит, с расстояния 30 *км* не видно 27 *м* высоты маяка; остаются видимыми только 13 *м*.

МОЛНИЯ

Задача № 42

Над вашей головой, на высоте $1\frac{1}{2}$ *км*, сверкнула молния. На каком расстоянии от вашего места еще можно было видеть молнию?



122

Решение

Надо вычислить дальность горизонта для высоты 1,5 *км*. Она равна

$$113\sqrt{1{,}5} = 138 \text{ км}.$$

Значит, если местность ровная, то молния была видна человеку, — глаз которого находится на уровне земли, — на расстоянии 138 *км* (а с 6%-й поправкой — на 146 *км*). В точках, удаленных на 146 *км*, она была видна на самом горизонте; а так как на такое расстояние звук не доносится, то наблюдалась она здесь как зарница — молния без грома.

ПАРУСНИК

Задача № 43

Вы стоите на берегу озера или моря, у самой воды, и наблюдаете за удаляющимся от вас парусником. Вам известно, что верхушка мачты возвышается на 6 *м* над уровнем воды. На каком расстоянии от вас парусник начнет кажущимся образом опускаться в воду (т. е. за горизонт) и на каком расстоянии он скроется окончательно?

Решение

Парусник начнет скрываться под горизонт (см. рис. 118) в точке B — на расстоянии дальности горизонта для человека среднего роста, т. е. 4,4 *км*. Совсем скроется он под горизонт в точке, расстояние которой от B равно

$$113\sqrt{0{,}006} = 8{,}7 \text{ км.}$$

Значит, парусник скроется под горизонт на расстоянии от берега

$$4{,}4 + 8{,}7 = 13{,}1 \text{ км.}$$

ГОРИЗОНТ НА ЛУНЕ

Задача № 44

До сих пор все расчеты наши относились к земному шару. Но как бы изменилась дальность горизонта, если бы наблюдатель очутился на другой планете, например на одной из равнин Луны?

Решение

Задача решается по той же формуле: дальность горизонта $= \sqrt{2Rh}$, но в данном случае вместо $2R$ надо подставить длину не диаметра земного шара, а диаметра Луны, равного 3 500 *км*. При возвышении глаза над почвой на 1,5 *м* имеем:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{3500 \times 0{,}0015} = 2{,}3 \text{ км.}$$

На лунной равнине мы видели бы вдаль всего на $2\frac{1}{3}$ *км*.

В ЛУННОМ КРАТЕРЕ

Задача № 45

Наблюдая Луну в зрительную трубу даже скромных размеров, мы видим на ней множество так называемых кольцевых гор — образований, подобных которым на Земле нет. Одна из величайших кольцевых гор — „кратер Коперника" — имеет в диаметре снаружи 124 *км*, внутри 90 *км*. Высочайшие точки кольцевого вала возвышаются над почвой внутренней котловины на 1500 *м*. Но если бы вы очутились в средней части внутренней котловины, увидели бы вы оттуда этот кольцевой вал?

Решение

Чтобы ответить на вопрос, нужно вычислить дальность горизонта для гребня вала, т. е. для высоты 1,5 *км*. Она равна на луне $\sqrt{3500 \times 1{,}5} = 23$ *км*. Прибавив дальность горизонта для человека среднего роста, получим расстояние, на котором кольцевой вал скрывается под горизонтом наблюдателя,

$$23 + 2{,}3 = \text{около } 25 \text{ км}.$$

А так как центр вала удален от его краев на 45 *км*, то видеть этот вал из центра невозможно, — разве только взобравшись на склоны центральных гор, возвышающихся на дне этого кратера до высоты 600 *м*. [1]

НА ЮПИТЕРЕ

Задача № 46

Как велика дальность горизонта на Юпитере, диаметр которого в 11 раз больше земного?

[1] См. книгу того же автора: „Занимательная астрономия", гл. II, статью „Лунные пейзажи".

Решение

Если Юпитер покрыт твердой корой и имеет ровную поверхность, то человек, перенесенный на его равнину, мог бы видеть вдаль на

$$\sqrt{11 \times 12\,800 \times 0{,}0015} = 14{,}4 \text{ км}.$$

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ УПРАЖНЕНИЙ.

Вычислить дальность горизонта для перископа подводной лодки, возвышающегося над спокойной поверхностью моря на 30 *см*.

Как высоко должен подняться летчик над Ладожским озером, чтобы видеть сразу оба берега, разделенные расстоянием 210 *км*?

Как высоко должен подняться летчик между Ленинградом и Москвой, чтобы сразу видеть оба города? Расстояние Ленинград — Москва равно 640 *км*?

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЯ РОБИНЗОНОВ

(Несколько страниц из Жюля Верна)

ГЕОМЕТРИЯ ЗВЕЗДНОГО НЕБА

Было время, когда автор этой книги готовил себя к не совсем обычной будущности: к карьере человека, потерпевшего кораблекрушение. Короче сказать, я мечтал сделаться Робинзоном. Если бы это осуществилось, настоящая книга была бы составлена гораздо интереснее, чем теперь, но может быть — и вовсе осталась бы ненаписанной. Мечта моя до сих пор не сбылась, и теперь я об этом не жалею. Однако в юности я горячо верил в свое призвание Робинзона и готовился к нему вполне серьезно. Ведь даже самый посредственный Робинзон должен обладать многими знаниями и навыками, необязательными для людей других профессий.

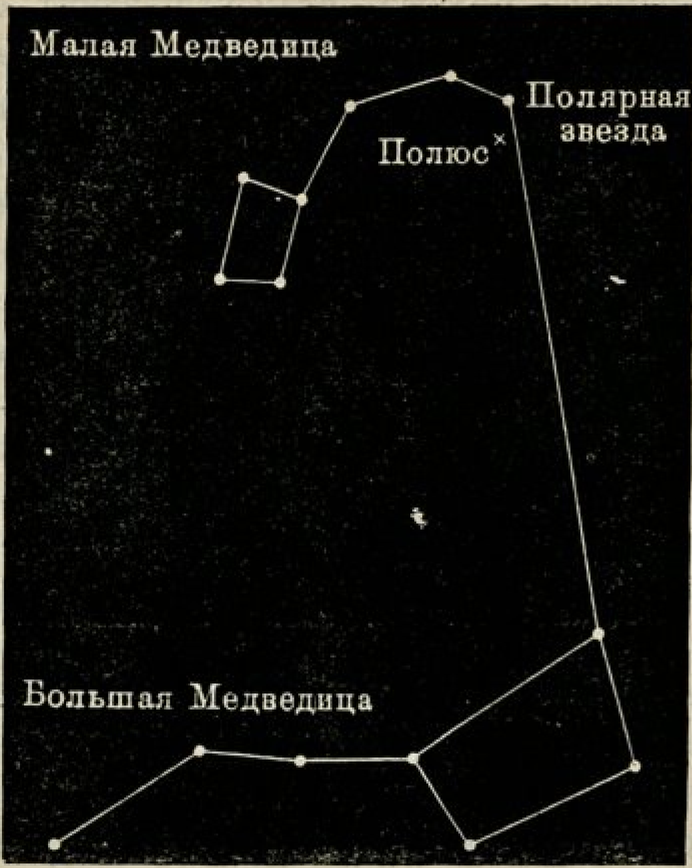
Что прежде всего придется сделать человеку, закинутому крушением на необитаемый остров? Конечно, определить географическое положение своего невольного обиталища — широту и долготу. Об этом, к сожалению, слишком кратко говорится в большинстве историй старых и новых Робинзонов. В полном издании подлинного „Робинзона Крузо" вы найдете об этом всего одну строку да и ту скобках:

„В тех широтах, где лежит мой остров (т. е., по моим вычислениям, на 9° 22′ севернее экватора)..."

Эта досадная краткость приводила меня в отчаяние, когда я запасался сведениями, необходимыми для моей воображаемой будущности. Я готов был уже отказаться от завидной карьеры единственного обитателя пустынного острова, когда секрет раскрылся передо мною в „Таинственном острове“ Жюля Верна.

Я не готовлю моих читателей в Робинзоны, но все же считаю нелишним остановиться здесь на простейших способах определения географической широты. Умение это может пригодиться не для одних только обитателей неведомых островов. У нас еще столько населенных мест, не обозначенных на картах (да и всегда ли под руками подробная карта?), что задача определения географической широты может встать перед многими из моих читателей. Правда, мы не можем утверждать, как некогда Лермонтов, что даже губернский „Тамбов на карте генеральной кружком означен не всегда“; но множество местечек и колхозов, в которых живет добрая половина обитателей Союза, не обозначено на общих картах еще и в наши дни. Не надо пускаться в морские приключения, чтобы оказаться в роли Робинзона, впервые определяющего географическое положение места своего обитания.

Дело это в основе сравнительно несложное. Наблюдая в ясную звездную ночь за небом, вы заметите, что звезды медленно описывают на небесном своде наклонные круги, словно весь купол неба плавно вращается на косо утвержденной невидимой оси. В действительности же, конечно, вы сами, вращаясь вместе с Землею, описываете круги около ее оси в обратную сторону. Единственная точка звездного купола в нашем северном полушарии, которая сохраняет неподвижность, — та, куда упирается мысленное продолжение земной оси. Этот северный „полюс мира“ приходится невдалеке от яркой звезды на конце хвоста Малой Медведицы — Полярной звезды. Найдя ее на нашем северном небе, мы тем самым найдем и положение северного полюса мира. Отыскать



123

же ее не трудно, если найти сначала положение всем известного созвездия Большой Медведицы: проведите прямую линию через ее крайние звезды, как показано на рис. 123, и, продолжив ее на расстояние, примерно равное длине всего созвездия, вы наткнетесь на Полярную.

Это одна из тех точек на небесной сфере, которые понадобятся нам для определения географической широты. Вторая — так называемый „зенит“ — есть точка, приходящаяся на небе отвесно над вашей головой. Другими словами: зенит есть точка на небе, куда упирается мысленное продолжение того радиуса Земли, который проведен к занимаемому вами месту. Градусное расстояние по небесной дуге между вашим зенитом и Полярной звездой есть в то же время градусное расстояние вашего места от земного полюса. Если ваш зенит отстоит от Полярной на 30°, то вы отдалены от земного полюса на 30°, а значит, отстоите от экватора на 60°; иначе говоря, вы находитесь на 60-й параллели.

Следовательно, чтобы найти широту какого-либо места, надо лишь измерить в градусах (и его долях) „зенитное расстояние" Полярной звезды: после этого останется вычесть эту величину из 90° — и широта определена. Практически можно поступать иначе. Так как дуга между зенитом и горизонтом содержит 90°, то, вычитая зенитное расстояние Полярной звезды из 90°, мы получаем в остатке не что иное, как длину небесной дуги от Полярной до горизонта; иначе говоря, мы получаем „высоту" Полярной звезды над горизонтом. Поэтому географическая широта какого-либо места равна высоте Полярной звезды над горизонтом этого места.

Теперь вам понятно, что нужно сделать для определения широты. Дождавшись ясной ночи, вы отыскиваете на небе Полярную звезду и измеряете ее угловую высоту над горизонтом; результат сразу даст вам искомую широту вашего места. Если хотите быть точным, вы должны принять в расчет, что Полярная звезда не строго совпадает с полюсом мира, а отстоит от него на $1^1/_4$°. Поэтому Полярная звезда не остается совершенно неподвижной: она описывает около неподвижного небесного полюса маленький кружок, располагаясь то выше его, то ниже, то справа, то слева — на $1^1/_4$°. Определив высоту Полярной звезды в самом высоком и в самом низком ее положении (астроном сказал бы: в моменты ее верхней и нижней „кульминаций"), вы берете среднее из обоих измерений. Это и есть истинная высота полюса, а следовательно, и искомая широта места.

Но если так, то незачем избирать непременно Полярную звезду: можно остановиться на любой незаходящей звезде и, измерив ее высоту в обоих крайних положениях над горизонтом, взять среднюю из этих измерений. В результате получится высота полюса над горизонтом, т. е. широта места. Но при этом необходимо уметь улавливать моменты наивысшего и наинизшего положения избранной звезды, что усложняет дело; да и не всегда удается это наблюдать в течение одной ночи. Вот почему для первых приближенных измерений лучше работать с Полярной звездой, пренебрегая небольшим удалением ее от полюса.

До сих пор мы воображали себя находящимися в северном полушарии. Как поступили бы вы, очутившись в южном полушарии? Точно так же, с той лишь разницей, что здесь надо определять высоту не северного, а южного полюса мира. Близ этого полюса, к сожалению, нет яркой звезды вроде Полярной в нашем полушарии. Знаменитый Южный Крест сияет довольно далеко от южного полюса, и если мы желаем воспользоваться звездами этого созвездия для определения широты места, то придется брать среднее из двух измерений — при наивысшем и наинизшем положении звезды.

Герои романа Жюля Верна, при определении широты своего „таинственного острова", пользовались именно этим красивым созвездием южного неба. Поучительно перечесть то место романа, где описывается вся процедура. Заодно познакомимся и с тем, как новые Робинзоны справились со своей задачей, не имея угломерного инструмента.

ШИРОТА „ТАИНСТВЕННОГО ОСТРОВА"

„Было 8 часов вечера. Луна еще не взошла, но горизонт серебрился уже нежными бледными оттенками, которые можно было назвать лунной зарей. В зените блистали созвездия южного полушария и между ними созвездие Южного Креста. Инженер Смит некоторое время наблюдал это созвездие.

„— Герберт, — сказал он после некоторого раздумья, — у нас сегодня 15 апреля?

„— Да, — ответил юноша.

„— Если не ошибаюсь, завтра один из тех четырех дней в году, когда истинное время равно среднему времени: завтра солнце вступит на меридиан ровно в полдень по нашим часам. [1] Если погода будет ясная, мне удастся приблизительно определить долготу острова.

„— Без инструментов?

„— Да. Вечер ясный, и потому я сегодня же попытаюсь определить широту нашего острова, измерив высоту звезд Южного Креста, т. е. высоту южного полюса над горизонтом. А завтра в полдень определю и долготу острова.

„Если бы у инженера был секстант — прибор, позволяющий точно измерять угловые расстояния предметов помощью отражения световых лучей, — задача не представляла бы никаких затруднений. Определив в этот вечер высоту полюса, а завтра днем — момент прохождения солнца через меридиан, он получил бы географические координаты острова: широту и долготу. Но секстанта не имелось, и надо было его заменить.

„Инженер вошел в пещеру. При свете костра он вырезал две прямоугольные планки, которые соединил в одном конце в форме циркуля так, что ножки его

---

[1] Наши часы идут не строго согласованно с солнечными часами: между „истинным солнечным временем“ и тем „средним временем“, которое показывается точными часами, есть расхождение, равняющееся нулю только четыре дня в году: около 16 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря. (См. „Занимательную астрономию“ того же автора).

можно было сдвигать и раздвигать. Для шарнира он воспользовался крепкой колючкой акации, найденной среди валежника у костра.

„Когда инструмент был готов, инженер возвратился на берег. Ему необходимо было измерить высоту полюса над горизонтом, ясно очерченным, т. е. над уровнем моря. Для своих наблюдений он отправился на площадку Далекого Вида, — при чем нужно принять во внимание также высоту самой площадки над уровнем моря. Это последнее измерение можно будет выполнить на другой день приемами элементарной геометрии.

„Горизонт, озаренный снизу первыми лучами луны, резко обрисовывался, представляя все удобства для наблюдения. Созвездие Южного Креста сияло на небе в опрокинутом виде: звезда а л ь ф а, обозначающая его основание, всего ближе лежит к южному полюсу (мира).

„Это созвездие расположено не так близко к южному полюсу, как Полярная звезда — к северному. Звезда а л ь ф а отстоит от полюса на 27°; инженер знал это и предполагал ввести это расстояние в свои вычисления. Он поджидал момента прохождения звезды через меридиан, — это облегчает выполнение операции.

„Смит направил одну ножку своего деревянного циркуля горизонтально, другую — к звезде а л ь ф а Креста, и отверстие образовавшегося угла дало угловую высоту звезды над горизонтом. Чтобы закрепить этот угол надежным образом, он прибил с помощью шипов акации к обеим планкам третью, пересекающую их поперек, так что фигура сохраняла неизменную форму.

„Оставалось лишь определить величину полученного угла, относя наблюдение к уровню моря, т. е. учитывая понижение горизонта, для чего необходимо было измерить высоту скалы. [1] Величина угла даст высоту звезды альфа Креста, а следовательно, и высоту полюса над горизонтом, т. е. географическую широту острова, так как широта всякого места земного шара равна высоте полюса над горизонтом этого места. Эти вычисления предполагалось произвести завтра".

Как выполнено было измерение высоты скалы, мои читатели знают уже из отрывка, приведенного в первой главе настоящей книги (стр. 19). Пропустив здесь это место романа, проследим за дальнейшей работой инженера:

„Инженер взял циркуль, который был устроен им накануне и помощью которого он определил угловое расстояние между звездой альфа Южного Креста и горизонтом. Он тщательно измерил величину этого угла помощью круга, разделенного на 360 частей, и нашел, что он равен 10°. Отсюда высота полюса над горизонтом — после присоединения к 10° тех 27°, которые отделяют названную звезду от полюса, и приведения к уровню моря высоты скалы, с вершины которой было выполнено измерение, — получилась равной 37°. Смит заключил, что остров Линкольн расположен на 37° южной широты, или — принимая во внимание несовершенство измерения — между 35-й и 40-й параллелями.

„Оставалось еще узнать его долготу. Инженер рассчитывал определить ее в тот же день, в полдень, когда солнце будет проходить через меридиан острова".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ДОЛГОТЫ

„Но как инженер определит момент прохождения солнца через меридиан острова, не имея для этого никакого инструмента? Вопрос этот очень занимал Герберта.

[1] Так как измерение производилось инженером не на уровне моря, а с высокой скалы, то прямая линия, проведенная от глаза наблю-

„Инженер распорядился всем, что нужно было для его астрономического наблюдения. Он выбрал на песчаном берегу совершенно чистое место, выровненное морским отливом. Шестифутовый шест, воткнутый на этом месте, был перпендикулярен к этой площадке.

„Герберт понял тогда, как намерен был действовать инженер для определения момента прохождения солнца через меридиан острова, или, иначе говоря, для определения местного полудня. Он хотел определить его по наблюдению тени, отбрасываемой шестом на песок. Способ этот, конечно, недостаточно точен, но, за отсутствием инструментов, он давал все же довольно удовлетворительный результат.

„Момент, когда тень шеста сделается наиболее короткой, будет полдень. Достаточно внимательно проследить за движением конца тени, чтобы заметить момент, когда тень, перестав сокращаться, вновь начнет удлиняться. Тень как бы играла в этом случае роль часовой стрелки на циферблате.

„Когда, по расчету инженера, наступило время наблюдения, он стал на колени и, втыкая в песок маленькие колышки, начал отмечать постепенное укорочение тени, отбрасываемой шестом.

„Журналист (один из спутников инженера) держал в руке свой хронометр, готовясь заметить момент, когда тень станет наиболее короткой. Так как инженер производил наблюдение 16 апреля, т. е. в один из тех дней, когда истинный полдень совпадает со средним, то

дателя к краю горизонта, не строго совпадала с перпендикуляром к земному радиусу, а составляла с ним некоторый угол. Однако угол этот так мал, что для данного случая можно было им смело пренебречь (при высоте в 100 *м* он едва составляет третью долю градуса); поэтому Смиту, вернее,—Жюлю Верну,—не было надобности усложнять расчета введением этой поправки.

Я. П.

момент, замеченный журналистом по его хронометру, будет установлен по времени меридиана Вашингтона (места отправления путешественников).

„Солнце медленно подвигалось. Тень постепенно укорачивалась. Заметив, наконец, что она начала удлиняться, инженер спросил:

„— Который час?

„— Пять часов и одна минута, — ответил журналист.

„Наблюдение было окончено. Оставалось только проделать несложный расчет.

„Наблюдение установило, что между меридианом Вашингтона и меридианом острова Линкольна разница во времени почти ровно 5 часов. Это значит, что когда на острове полдень, в Вашингтоне уже 5 часов вечера. Солнце в своем кажущемся суточном движении вокруг земного шара пробегает 1° в 4 минуты, а в час — 15°. 15°, умноженные на 5 (число часов), составляют 75°.

„Вашингтон лежит на меридиане 77° 3′11″ к западу от Гриничского меридиана, принимаемого американцами, как и англичанами, за начальный. Значит, остров лежал приблизительно на 152° западной долготы.

„Принимая во внимание недостаточную точность наблюдений, можно было утверждать, что остров лежит между 35-й и 40-й параллелями южной широты и между 150-м и 155-м меридианами к западу от Гринича“.

Отметим в заключение, что способов определения географической долготы имеется несколько и довольно разнообразных; способ, примененный героями Жюля Верна, лишь один из них (известный под названием „способа перевозки хронометров“). Точно также существуют и другие приемы определения широты, более точные, нежели здесь описанный (для мореплавания, например, непригодный).

Часть вторая

МЕЖДУ ДЕЛОМ И ШУТКОЙ В ГЕОМЕТРИИ

Есть бесчисленное множество умных вещей, которым люди дают неразумное применение. Но не мало есть и пустяков, которыми можно пользоваться разумно.

Монтескье

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ВПОТЬМАХ

НА ДНЕ ТРЮМА

От вольного воздуха полей и моря перенесемся в тесный и темный трюм старинного корабля, где юный герой одного из романов Майн-Рида успешно разрешил геометрическую задачу при такой обстановке, при которой, наверное, ни одному из моих читателей заниматься математикой не приходилось. В романе „Мальчик-моряк“ (или „На дне трюма“) Майн-Рид повествует о юном любителе морских приключений, который, не имея средств заплатить за проезд, пробрался в трюм незнакомого корабля и здесь неожиданно оказался закупоренным на все время морского перехода. Роясь среди багажа, заполнявшего его темницу, он наткнулся на ящик сухарей и бочку воды. Рассудительный мальчик понимал, что с этим ограниченным запасом еды и питья надо быть возможно бережливее, и потому решил разделить его на ежедневные порции. Пересчитать сухари было делом нетрудным, но как установить порции воды, не зная ее общего запаса? Вот задача, которая стояла перед юным героем Майн-Рида. Посмотрим, как он справился с нею.

ИЗМЕРЕНИЕ БОЧКИ

(Задача Майн-Рида)

„Мне необходимо было установить для себя дневную порцию воды. Для этого нужно было узнать, сколько ее содержится в бочке, и затем разделить по порциям.

К счастью, в деревенской школе учитель сообщил нам на уроках арифметики некоторые начальные сведения из геометрии: я имел понятие о кубе, пирамиде, цилиндре, шаре; знал я также, что бочку можно рассматривать как два усеченных конуса, сложенных своими большими основаниями.

„Чтобы определить вместимость моей бочки, нужно было знать ее высоту (или, в сущности, половину этой высоты), затем окружность одного из доньев и окружность срединного сечения, т. е. самой широкой части бочки. Зная эти три величины, я мог точно определить, сколько кубических единиц содержится в бочке.

„Мне оставалось только измерить эти величины, — но в этом-то и заключалась вся трудность. Как выполнить это измерение? Узнать высоту не трудно: она была передо мною; что же касается окужностей, то я не мог к ним подступиться. Я был слишком мал ростом, чтобы достать до верху; кроме того, мешали ящики, стоявшие по сторонам.

„Было еще одно затруднение: у меня не было ни масштаба, ни шнурка, которыми можно было бы воспользоваться для измерения; как мог я определять величины, если у меня не было никакой меры? Однако я решил не отказываться от своего плана, пока не обдумаю его со всех сторон".

МЕРНАЯ ЛИНЕЙКА

„Размышляя о бочке, с твердым решением ее измерить, я внезапно открыл то, чего мне не хватало. Мне поможет прут такой длины, чтобы он мог пройти насквозь через бочку в самом широком ее месте. Если я введу прут в бочку и уткнусь им в противоположную стенку, я буду знать длину диаметра. Останется лишь утроить длину прута, чтобы получить длину окружности. Это не строго точно, но вполне достаточно для обиходных измерений. А так как отверстие, которое я раньше проделал в бочке, приходилось в самой широкой ее части, то, введя в него прут, я буду иметь тот диаметр, который мне нужен.

„Но где найти прут? Это было не трудно. Я решил воспользоваться доской от ящика с сухарями, и тотчас же принялся за работу. Правда, доска была длиною всего в 60 *см*, бочка же — более чем вдвое шире. Но это не могло составить затруднения, нужно было лишь приготовить три палочки и связать их вместе, чтобы получить прут достаточной длины.

„Разрезав доску вдоль волокон, я приготовил три хорошо округленных и обглаженных палочки. Чем связать их? Я воспользовался шнурками от моих ботинок, имевшими в длину чуть не целый метр. Связав палочки, я получил планку достаточной длины — около полутора метра.

„Я приступил было к измерению, но наткнулся на новое препятствие. Оказалось невозможным ввести мой прут в бочку: помещение было слишком тесно. Нельзя было и согнуть прута, — он наверное бы сломался.

„Вскоре я придумал, как ввести в бочку мой измерительный прут: я разобрал, его на части, ввел первую часть и лишь тогда привязал к ее выступающему концу вторую часть; затем, протолкнув вторую часть, привязал третью.

„Я направил прут так, чтобы он уперся в противоположную стенку как раз против отверстия, и сделал на нем знак вровень с поверхностью бочки. Отняв толщину стенок, я получил величину, которая необходима была мне для измерений.

„Я вытащил прут тем же порядком, как и ввел его, стараясь тщательно замечать те места, где отдельные части были связаны, чтобы потом придать пруту ту же длину, какую он имел в бочке. Небольшая ошибка могла бы в конечном результате дать значительную погрешность.

„Итак, у меня был диаметр нижнего основанния усеченного конуса. Теперь нужно найти диаметр дна бочки, которое служило верхним основанием конуса. Я положил прут на бочку, уперся им в противоположную точку края и отметил на ней величину диаметра. На это потребовалось не больше минуты.

„Оставалось только измерить высоту бочки. Надо было, скажете вы, поместить палку отвесно возле бочки и сделать на ней отметку высоты. Но мое помещение ведь было совершенно темным, и, поместив палку отвесно, я не мог видеть, до какого места доходит верхнее дно бочки. Я мог действовать только ощупью: пришлось бы нащупать руками дно бочки и соответствующее место на палке. Кроме того, палка, вращаясь возле бочки, могла наклониться, и я получил бы неверную величину для высоты.

„Подумав хорошенько, я нашел, как преодолеть это затруднение. Я связал только две планки, а третью положил на верхнее дно бочки так, чтобы она выдавалась за край его на 30—40 *см*; затем я приставил к ней длинный прут так, чтобы он образовал с нею прямой угол и, следовательно, был параллелен высоте бочки. Сделав отметку в том месте бочки, которое больше всего выступало, т. е. посредине, и откинув толщину дна, я получил таким образом половину высоты бочки, или — что то же самое — высоту одного усеченного конуса.

„Теперь у меня были все данные, необходимые для решения задачи".

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ВЫПОЛНИТЬ

„Выразить объем бочки в кубических единицах и затем перечислить в галлоны [1] представляло простое арифметическое вычисление, с которым не трудно было справиться. Правда, для вычислений у меня не было письменных принадлежностей, но они были бы и бесполезны, так как я находился в полной темноте. Мне часто приходилось выполнять в уме все четыре арифметических действия без пера и бумаги. Теперь предстояло оперировать с не слишком большими числами, и задача меня нисколько не смущала.

„Но я столкнулся с новым затруднением. У меня были три данных: высота и оба основания усеченного конуса; но какова численная величина этих данных? Необходимо, прежде чем вычислить, выразить эти величины числами.

„Сначала это препятствие казалось мне непреодолимым. Раз у меня нет ни фута, ни метра, никакой измерительной линейки, приходится отказаться от решения задачи.

„Однако я вспомнил, что в порту я измерил свой рост, который оказался равным четырем футам. Как же могло пригодиться мне теперь это сведение? Очень просто: я мог отложить четыре фута на моем пруте и взять это за основание при вычислениях.

„Чтобы отметить свой рост, я вытянулся на полу, затем положил на себя прут так, чтобы один его конец касался моих ног, а другой лежал на лбу. Я придерживал прут одной рукой, а свободной отметил на нем место, против которого приходилось темя.

---

[1] Галлон — мера емкости. Английский галлон заключает 277 куб. дюймов (около $4^1/_2$ л). В галлоне 4 „кварты“; в кварте — 2 „пинты“.

„Дальше — новые затруднения. Прут, равный 4 футам, бесполезен для измерений, если на нем не отмечены мелкие деления — дюймы. Не трудно как будто разделить 4 фута на 48 частей (дюймов) и нанести эти деления на линейке. В теории это действительно весьма просто; но на практике, да еще в той темноте, в какой я находился, это было не так легко и просто.

„Каким образом найти на пруте середину этих 4 футов? Как разделить каждую половину прута снова пополам, а затем каждый из футов на 12 дюймов, в точности равные друг другу?

„Я начал с того, что приготовил палочку немного длиннее 2 футов. Сравнив ее с прутом, где отмечены были 4 фута, я убедился, что двойная длина палочки немного больше 4 футов. Укоротив палочку и повторив операцию несколько раз, я на пятый раз достиг того, что двойная длина палочки равнялась ровно 4 футам.

„Это отняло много времени. Но времени у меня было достаточно: я даже был доволен, что имел чем заполнить его.

„Впрочем, я догадался сократить дальнейшую работу, заменив палочку шнуром, который удобно было складывать пополам. Для этого хорошо пригодились шнурки от моих ботинок. Связав их прочным узлом, я принялся за работу — и вскоре мог уже отрезать кусок длиною ровно в 1 фут. До сих пор приходилось складывать вдвое, — это было легко. Дальше пришлось сложить втрое, что было труднее. Но я с этим справился, и вскоре у меня в руках было три куска по 4 дюйма каждый. Оставалось сложить их вдвое и еще раз вдвое, чтобы получить кусочек длиною в 1 дюйм.

„У меня было теперь то, чего мне нехватало, чтобы нанести на пруте дюймовые деления; аккуратно прикладывая к нему куски моей мерки, я сделал 48 зарубок, означавших дюймы. Тогда в моих руках оказалась разделенная на дюймы линейка, помощью которой можно было измерить полученные мною длины. Только теперь мог я довести до конца задачу, которая имела для меня столь важное значение.

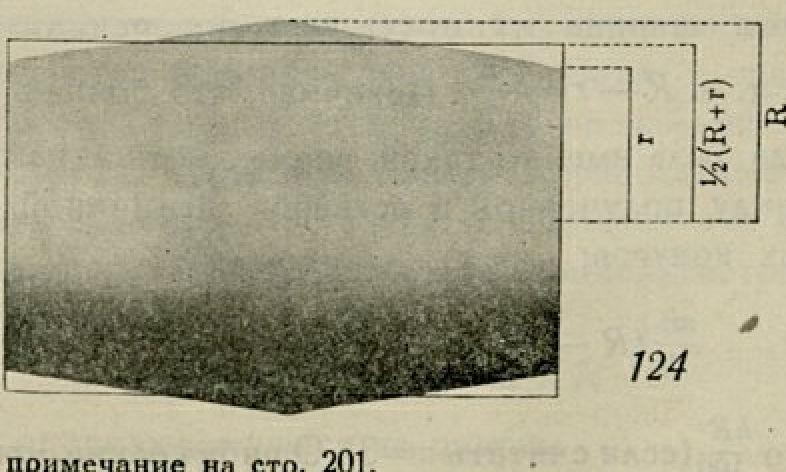
„Я немедленно занялся этим вычислением. Измерив оба диаметра, я взял среднее из их длин, затем нашел площадь, соответствующую этому среднему диаметру. Так я получил величину основания цилиндра, равновеликого двойному конусу равной высоты. Умножив результаты на высоту, я определил кубическое содержание искомого объема.

„Разделив число полученных кубических дюймов на 69 (число кубических дюймов в одной кварте),[1] я узнал, сколько кварт в моей бочке.

„В ней вмещалось свыше ста галлонов, — точнее, 108“.

ПОВЕРКА РАСЧЕТА

Читатель, сведущий в геометрии, заметит, без сомнения, что способ вычисления объема двух усеченных конусов, примененный юным героем Майн-Рида, не вполне точен. Если (рис. 124) обозначим радиус мень-



124

[1] См. примечание на стр. 201.

ших оснований через r, радиус большего — через R, а высоту бочки, т. е. двойную высоту каждого усеченного конуса, через h, то объем, полученный мальчиком, выразится формулой:

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 h=\frac{\pi h}{4}(R^2+r^2+2Rr).$$

Между тем, поступая по правилам геометрии, т. е. применяя формулу объема усеченного конуса, мы получили бы для искомого объема выражение:

$$\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr).$$

Оба выражения не тождественны, и легко убедиться, что второе больше первого на

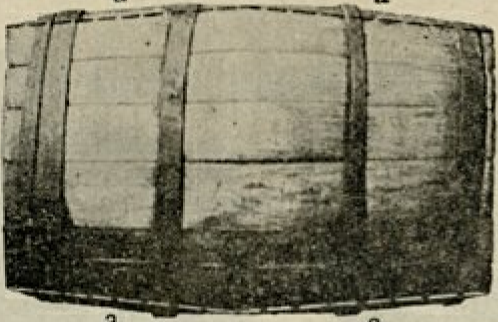
$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2.$$

Знакомые с алгеброй сообразят, что разность $\frac{\pi h}{12}(R-r)^2$ есть величина положительная, т. е. способ майн-ридовского мальчика дал ему результат преуменьшенный.

Интересно определить, как, примерно, велико это преуменьшение. Бочки обычно устраиваются так, что наибольшая ширина их превышает поперечник дна на $^1/_5$ долю, т. е. $R-r=\frac{R}{5}$. Принимая, что бочка в романе Майн-Рида была именно такой формы, можем найти разность между полученной и истинной величиной объема усеченных конусов:

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2=\frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2=\frac{\pi h R^2}{300},$$

т. е. около $\frac{hR^2}{100}$ (если считать $\pi=3$). Ошибка равна, мы видим,



125

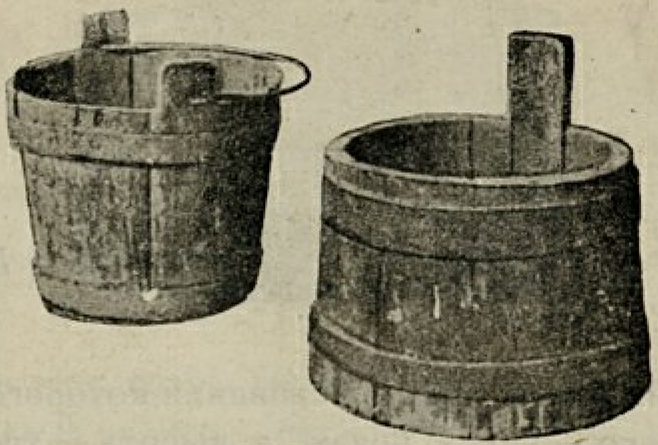
объему цилиндра, радиус основания которого есть радиус наибольшего сечения бочки, а высота — трехсотая доля ее высоты.

Однако, небольшое преувеличение результата в данном случае даже желательно, так как объем бочки заведомо больше объема двух вписанных в нее усеченных конусов. Это ясно из рис. 125, где видно́, что при указанном способе обмера бочки отбрасывается часть ее объема, обозначенная буквами *а*, *а*, *а*, *а*.

Юный математик Майн-Рида не сам придумал эту формулу для вычисления объема бочки; она приводится в некоторых начальных руководствах по геометрии как удобный прием для приближенного определения содержания бочек. Надо заметить, что измерить объем бочки совершенно точно — задача весьма нелегкая. Над нею размышлял еще гениальный Кеплер, оставивший, в числе своих математических сочинений, специальную работу: „Об искусстве измерять бочки". Простое и точное геометрическое решение этой задачи не найдено и по настоящее время: существуют лишь выработанные практикой приемы, дающие результат с большим или меньшим приближением. На юге Франции, например, употребляется простая формула:

$$\text{объем бочки} = 3{,}2\ h R r,$$

хорошо оправдывающаяся на опыте.



126

Интересно рассмотреть также вопрос: почему, собственно, бочкам придается такая неудобная для обмера орма — цилиндра с выпуклыми боками? Не проще ли было бы изготовлять бочки строго цилиндрические? Такие цилиндрические бочки, правда, делаются, но не деревянные, а металлические (для керосина и т. п.). Итак, перед нами

Задача № 46

Почему деревянные бочки изготовляются с выпуклыми боками? Каково преимущество такой формы?

Решение

Выгода та, что, набивая на бочки обручи, можно надеть их плотно и туго весьма простым приемом: надвиганием их поближе к широкой части. Тогда обруч достаточно сильно стягивает клепки, обеспечивая бочке необходимую прочность.

По той же причине деревянным ведрам, ушатам, чанам и т. д. придается обычно форма не цилиндра, а усеченного конуса: здесь также тугое обхватывание изделия обручами достигается простым надвиганием их на широкую часть (рис. 126).

НОЧНОЕ СТРАНСТВОВАНИЕ МАРКА ТВЭНА

Находчивость, проявленная майн-ридовским мальчиком в его печальном положении, заслуживает удивления. В полной темноте, в какой он находился, большинство людей не сумели бы даже сколько-нибудь правильно ориентироваться, не говоря уже о том, чтобы выполнять при этом какие-либо измерения и вычисления. С рассказом Майн-Рида поучительно сопоставить комичную историю о бестолковом странствовании в темной комнате гостиницы — приключении, будто бы случившемся со знаменитым соотечественником Майн-Рида, юмористом Марком Твэном. В этом рассказе удачно подмечено, как трудно составить себе в темноте верное представление о расположении предметов даже в обыкновенной комнате, если обстановка мало знакома. Мы приводим далее, в сокращенной передаче, этот забавный эпизод из „Странствований за границей“ Марка Твэна.

„Я проснулся и почувствовал жажду. Мне пришла в голову прекрасная мысль — одеться, выйти в сад и освежиться, вымывшись у фонтана.

„Я встал потихоньку и стал разыскивать свои вещи. Нашел один носок. Где второй, я не мог себе представить. Осторожно спустившись на пол, я стал обшаривать кругом, но безуспешно. Стал искать дальше, шаря и загребая. Подвигался все дальше и дальше, но носка не находил и только натыкался на мебель. Когда я ложился спать, кругом было гораздо меньше мебели; теперь же комната была полна ею, особенно стульями, которые оказались повсюду. Не вселились ли сюда еще два семейства за это время? Ни одного из этих стульев я в темноте не видел, зато беспрестанно стукался о них головой.

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

„Наконец, я решил, что могу прожить и без одного носка. Встав, я направился к двери, как я полагал, — но неожиданно увидел свое тусклое изображение в зеркале.

„Ясно, что я заблудился и не имею ни малейшего представления о том, где нахожусь. Если бы в комнате было одно зеркало, оно помогло бы мне ориентироваться, но их было два, а это так же скверно, как тысяча.

„Я хотел пробраться к двери по стене. Я снова начал свои попытки — и уронил картину. Она была не велика, но натворила шуму, как целая панорама. Гаррис (сосед по комнате, спавший на другой кровати) не шевелился, но я чувствовал, что если буду действовать дальше в том же духе, то непременно разбужу его. Попробую другой путь. Найду снова круглый стол — я был около него уже несколько раз — и от него постараюсь пробраться к моей кровати; если найду кровать, то найду и графин с водой, и тогда, по крайней мере, утолю свою нестерпимую жажду. Лучше всего — ползти на руках и на коленях; этот способ я уже испытал и потому больше доверял ему.

„Наконец мне удалось набрести на стол — ощутить его головой — с небольшим сравнительно шумом. Тогда я снова встал и побрел, балансируя с протянутыми вперед руками и растопыренными пальцами. Нашел стул. Затем стенку. Другой стул. Затем диван. Свою палку. Еще один диван. Это меня удивило: я прекрасно знал, что в комнате был только один диван. Опять набрел на стол и получил новый удар. Затем наткнулся на новый ряд стульев.

„Только тогда пришло мне в голову то, что давно должно было притти: стол был круглый, а, следовательно, не мог служить точкой отправления при моих странствованиях. Наудачу пошел я в пространство между стульями и диваном, — но очутился в области совсем неизвестной, уронив по пути подсвечник с камина. После подсвечника я уронил лампу, а после лампы со звоном полетел на пол графин.

„Ага, — подумал я, — наконец-то я нашел тебя, голубчика!

„ — Воры! Грабят! — закричал Гаррис.

„Шум и крики подняли весь дом. Явились со свечами и фонарями хозяин, гости, прислуга.

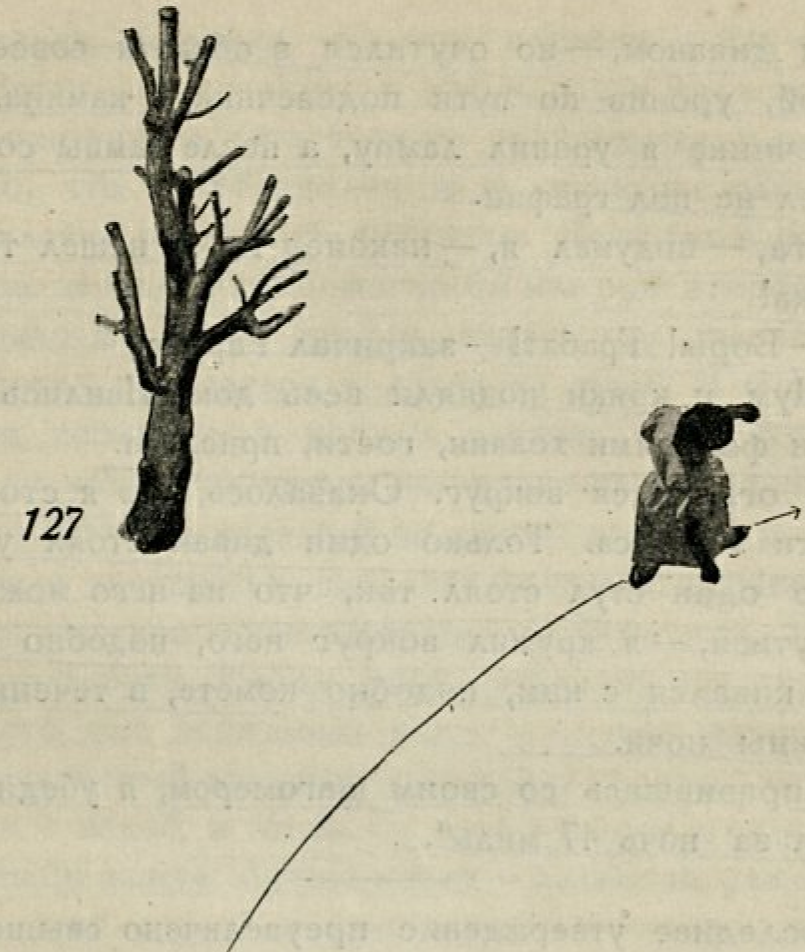
„Я оглянулся вокруг. Оказалось, что я стою возле кровати Гарриса. Только один диван стоял у стены; только один стул стоял так, что на него можно было наткнуться, — я кружил вокруг него, подобно планете, и сталкивался с ним, подобно комете, в течение целой половины ночи.

„Справившись со своим шагомером, я убедился, что сделал за ночь 47 миль“.

Последнее утверждение преувеличено свыше всякой меры: нельзя в течение нескольких часов пройти пешком 47 миль, — но остальные подробности истории довольно правдоподобны и метко характеризуют те комические затруднения, с которыми обычно встречаешься, когда бессистемно, наудачу, странствуешь в темноте по незнакомой комнате. Тем более должны мы оценить удивительную методичность и присутствие духа юного героя Майн-Рида, который не только сумел ориентироваться в полной темноте, но и разрешил при этих условиях нелегкую математическую задачу.

С ЗАКРЫТЫМИ ГЛАЗАМИ

По поводу кружения Твэна в темной комнате интересно отметить одно загадочное явление, которое на-



127

блюдается у людей, бродящих с закрытыми глазами: они не могут итти по прямому направлению, а непременно сбиваются в сторону, описывая дугу, воображая, однако, что движутся прямо вперед (рис. 127). Вот поучительный опыт, произведенный в Венеции на площади Марка. Людям завязывали глаза, ставили их на одном конце площади, как раз против собора, и предлагали до него дойти. Хотя пройти надо было всего только 175 *м*, все же ни один из испытуемых не дошел до фасада здания (82 *м* ширины), а все уклонялись в сторону, описывали дугу и упирались в одну из боковых колоннад (рис. 128).

Давно известно также, что люди, бродящие без компаса по степи в метель или в туманную погоду,—вообще во всех случаях, когда нет возможности ориентироваться,—обычно блуждают по кругам, хотя воображают, что идут все время вперед. Рассказы о таких безнадежных кружениях по пустынной местности можно встретить в описании многих путешествий.

Кто читал роман Жюля Верна „Приключения капитана Гаттераса", тот помнит, вероятно, эпизод о том, как путешественники наткнулись в снежной необитаемой пустыне на чьи-то следы:

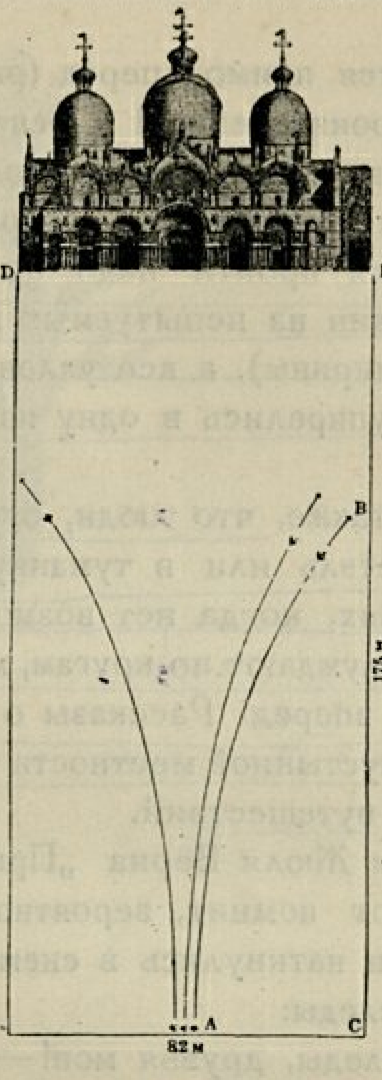
„— Это наши следы, друзья мои! — воскликнул доктор. — Мы заблудились в тумане и набрели на свои же собственные следы..."

Сходные эпизоды находим мы и в романах Майн-Рида. Классическое описание подобного блуждания по кругу оставил нам Л. Н. Толстой в „Хозяине и работнике":

„Василий Андреич гнал лошадь туда, где он почему-то предполагал лес и сторожку. Снег слепил ему глаза, а ветер, казалось, хотел остановить его, но он, нагнувшись вперед, не переставая гнал лошадь.

„Минут пять он ехал, как ему казалось, все прямо, ничего не видя, кроме головы лошади и белой пустыни.

„Вдруг перед ним зачернело что-то. Сердце радостно



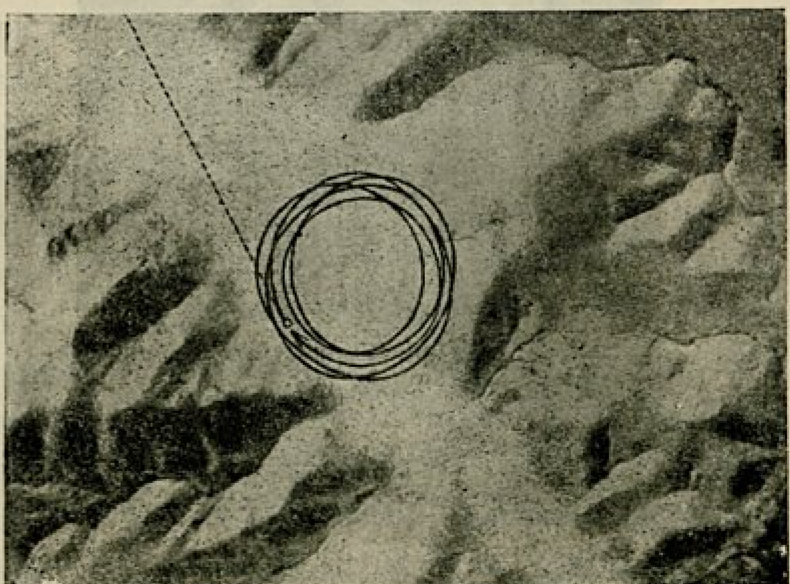
128

забилось в нем, и он поехал на это черное, уже видя в нем стены домов деревни. Но черное это было выросший на меже высокий чернобыльник... И почему-то вид этого чернобыльника, мучимого немилосердным ветром, заставил содрогнуться Василия Андреича, и он поспешно стал погонять лошадь, не замечая того, что, подъезжая к чернобыльнику, он совершенно изменил прежнее направление.

„Опять впереди его зачернело что-то. Это была опять межа, поросшая чернобыльником. Опять так же отчаянно трепался сухой бурьян. Подле него шел конный, заносимый ветром след. Василий Андреич остановился, нагнулся, пригляделся: это был лошадиный, слегка занесенный след и не мог быть ничей иной, как его собственный. Он, очевидно, кружился и на небольшом пространстве".

Норвежский физиолог Гульдберг, посвятивший кружению специальное исследование (1896 г.), собрал ряд тщательно проверенных свидетельств о подлинных случаях подобного рода. Приведем два примера.

Трое путников намеревались в снежную ночь покинуть сторожку и выбраться из долины, шириною в 4 *км*, чтобы достичь своего дома, расположенного в направлении, которое на прилагаемом рисунке отмечено пунктиром (рис. 129). В пути они бессознательно уклонились вправо, по кривой, отмеченной стрелкой. Пройдя некоторое расстояние, они, по расчету времени, полагали, что достигли цели, — на самом же деле очутились у той же сторожки, которую покинули. Отправившись в путь вторично, они уклонились еще сильнее и снова дошли до исходного пункта. То же повторилось в третий и четвертый раз. В отчаянии предприняли они пятую попытку, — но с тем же результатом. После пятого круга они отказа-

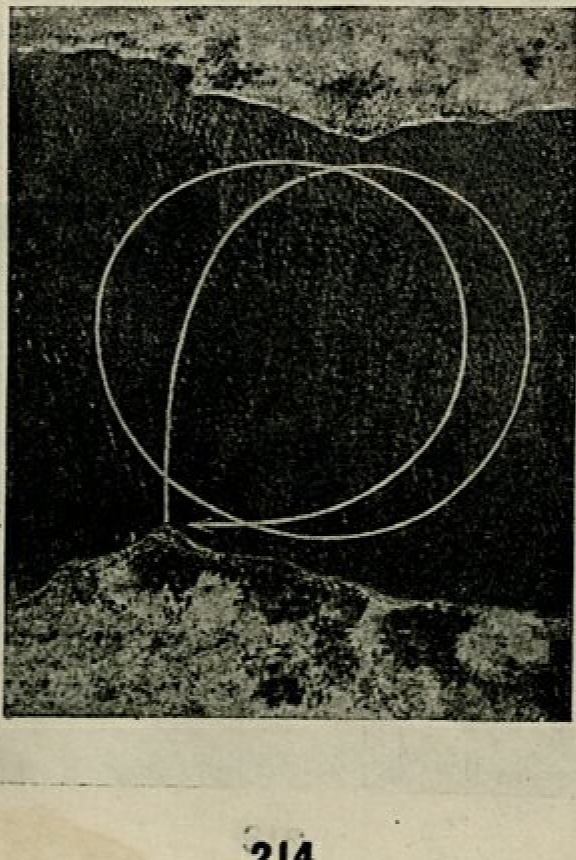


129

лись от дальнейших попыток выбраться из долины и дождались утра.

Еще труднее грести на море по прямой линии в темную беззвездную ночь или в густой туман. Отмечен случай, — один из многих подобных, — когда гребцы, решив переплыть в туманную погоду пролив шириною в 4 *км*, дважды побывали у противоположного берега, но не достигли его, а бессознательно описали два круга и высадились наконец... в месте своего отправления (рис. 130).

То же случается и с животными. Полярные путешественники рассказывают о кругах, которые описывают в снежных пустынях животные, запряженные в сани. Собаки, которых пускают плавать с завязанными глазами, также описывают в воде круги. По кругу же летят и ослепленные птицы. Затравленный зверь, лишившийся



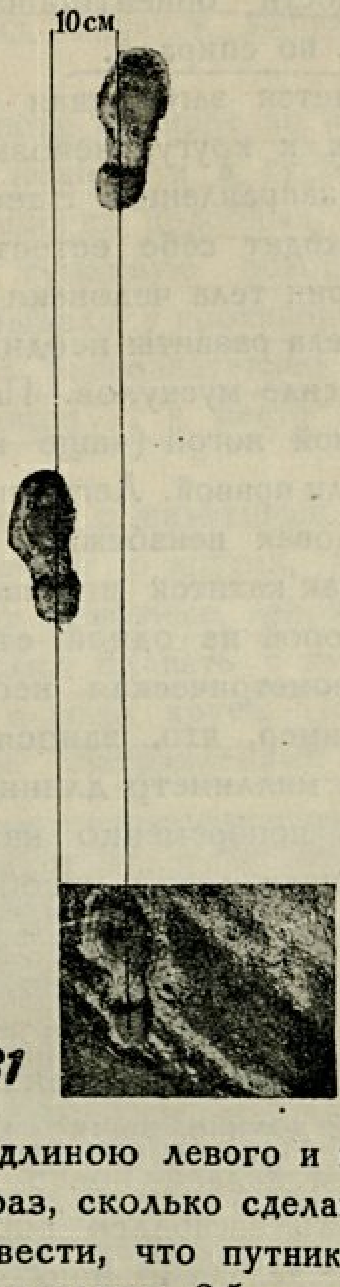
130

от страха способности ориентироваться, спасается не по прямой линии, а по спирали.

Чем же объясняется загадочная приверженность человека и животных к кругу, невозможность держаться в темноте прямого направления? Здесь нет ничего таинственного: она находит себе естественное объяснение в неполной симметрии тела человека и животных.

Обе половины тела развиты неодинаково: правая нога не равна левой по силе мускулов. Поэтому человек, например, делает одной ногой (чаще всего левой) более длинные шаги, нежели правой. Легко понять, что, двигаясь таким образом, человек неизбежно должен описывать дугу: вспомните, как катится игрушечная заводная тележка, колеса которой на одной стороне больше, чем на другой. Это геометрическая необходимость. Представьте себе, например, что, занося левую ногу, человек делает шаг на миллиметр длиннее, чем правой ногой. Тогда, сделав попеременно каждой ногой тысячу шагов, человек опишет левой ногой путь на 1000 *мм*, т. е. на целый метр, длиннее, чем правой. На прямых параллельных путях это невозможно, зато вполне осуществимо на концентрических окружностях.

Мы можем даже, пользуясь планом описанного выше кружения в снежной долине, вычислить, насколько у тех путников левая нога делала более длинный шаг, чем правая (так как путь загибался вправо, то ясно, что более длинные шаги делала именно левая нога). Расстояние между линиями отпечатков правой и левой ног при ходьбе (рис. 131) равно, примерно, 10 *см*, т. е. 0,1 *м*. Когда человек описывает один полный круг, его правая нога проходит путь $2\pi R$, а левая — $2\pi(R+0{,}1)$, где R — радиус этого круга в метрах. Разность $2\pi(R+0{,}1)-2\pi R=2\pi\cdot 0{,}1$, т. е. 0,62 *м*, или 620 *мм*, составилась



131

из разницы между длиною левого и правого шага, повторенной столько раз, сколько сделано было шагов. Из рис. 129 можно вывести, что путники наши описывали круги диаметром, примерно, 3,5 *км*, т. е. длиною около 10 000 *м*. При средней длине шага 0,7 *м* на протяжении этого пути было сделано $\frac{10\,000}{0{,}7} = 14\,000$ шагов; из них 7 000 правой ногой и столько же — левой. Итак, мы узнали, что 7 000 „левых“ шагов больше 7 000 „правых“ шагов на 620 *мм*. Отсюда один „левый“ шаг длиннее одного „правого“ на $\frac{620}{7000}$ *мм*, или менее чем на 0,1 *мм*. Вот какая ничтожная разница достаточна, чтобы вызвать столь поражающий результат!

Радиус того круга, который блуждающий описывает, зависит от разности длины „правого“ и „левого“ шага. Эту зависимость не трудно установить. Число шагов, сделанных на протяжении одного круга, при длине шага 0,7 *м*, равно $\frac{2\pi R}{0{,}7}$, где R — радиус круга; из них „левых“ шагов $\frac{2\pi R}{2 \cdot 0{,}7}$ и столько же „правых“. Умножив это число на величину x разности длины шагов, получим разность длин тех концентрических кругов, которые описаны левой и правой ногами, т. е.

$$\frac{2\pi \cdot Rx}{2 \cdot 0{,}7} = 2\pi \cdot 0{,}1, \quad \text{или} \quad Rx = 0{,}14 \text{ м}.$$

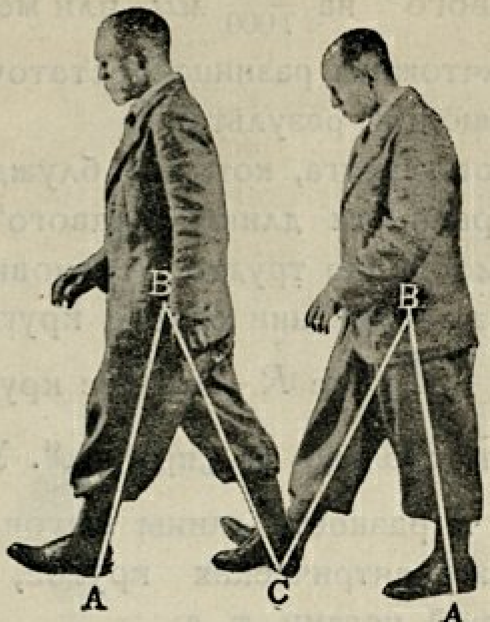
По этой простой формуле легко вычислить радиус круга, когда известна разность шагов, и обратно. Например, для участников опыта на площади Марка в Венеции мы можем установить наибольшую величину радиуса кругов, описанных ими при ходьбе. Действительно, так как ни один не дошел до фасада DE здания (рис. 128), то по „стрелке“ $AC = 41$ *м* и хорде BC, не превышающей 175 *м*, можно вычислить максимальный радиус дуги AB. Он определяется из равенства

$$2R = \frac{\overline{BC}^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = 750 \text{ м},$$

откуда R, максимальный радиус, будет около 370 *м*.

Зная это, мы из полученной раньше формулы $Rx = 0{,}14$ определяем наименьшую величину разности длины шагов:

$$370x = 0{,}14, \text{ откуда } x = 0{,}4 \text{ мм}.$$



132

Итак, разница в длине правых и левых шагов у участников опыта была не менее 0,4 *мм.*

Иногда приходится читать и слышать, что факт кружения при ходьбе вслепую зависит от различия в длине правой и левой ног: так как левая нога у большинства людей длиннее правой, то люди при ходьбе должны неизбежно уклоняться вправо от прямого направления. Такое объяснение основано на геометрической ошибке. Важна разная длина ш а г о в, а не н о г. Из рис. 132 ясно, что и при наличии заметной разницы в длине ног можно все же делать строго одинаковые шаги, если выносить при ходьбе каждую ногу на одинаковый угол (треугольники *ABC*, налево, и *CBA*, направо, равны). Наоборот при строго одинаковой длине ног шаги могут быть различной длины, если одна нога дальше выносится при ходьбе, нежели другая.

По сходной причине лодочник, гребущий правой рукой сильнее, чем левой, должен неизбежно увлекать лодку по кругу, загибая в левую сторону. Животные, делающие неодинаковые шаги правыми или левыми ногами или неравной силы взмахи правым и левым крылом, также должны двигаться по кругам всякий раз, когда лишены возможности контролировать прямолинейное направление зрением. Здесь тоже достаточно весьма незначительной разницы в силе рук, ног или крыльев.

При таком взгляде на дело указанные раньше факты утрачивают свою таинственность и становятся вполне естественными. Удивительно было бы, если бы люди и животные, наоборот, могли выдерживать прямое направление, не контролируя его глазами. Ведь необходимым условием для этого является строго геометрическая симметрия тела, абсолютно невозможная для произведения живой природы. Малейшее же уклонение от математически совершенной симметрии должно повлечь за собою, как неизбежное следствие, движение по дуге. Чудо не то, чему мы здесь удивляемся, а то, что мы готовы были считать естественным.

Невозможность держаться прямого пути не составляет для человека существенной помехи; компас, дороги, карты спасают его в большинстве случаев от последствий этого недостатка.

Не то у животных, особенно у обитателей пустынь, степей, безграничного морского простора: для них несимметричность тела, заставляющая их описывать круги вместо прямых линий, — важный жизненный фактор. Словно невидимой цепью приковывает он их к месту рождения, лишая возможности удаляться от него сколько-нибудь значительно. Лев, отважившийся уйти подальше в пустыню, неизбежно возвращается обратно. Чайки, покидающие родные скалы для полета в открытое море,

133

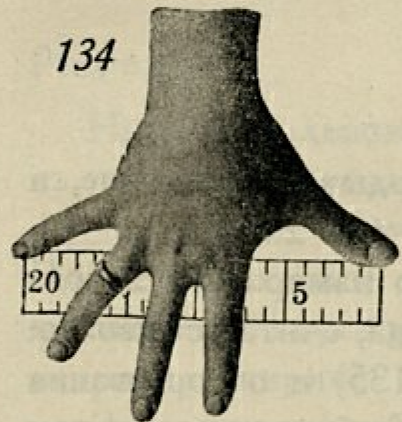
не могут не возвращаться к гнезду (тем загадочнее, однако, далекие перелеты птиц, пересекающие по прямому направлению материки и океаны.)

ИЗМЕРЕНИЕ ГОЛЫМИ РУКАМИ

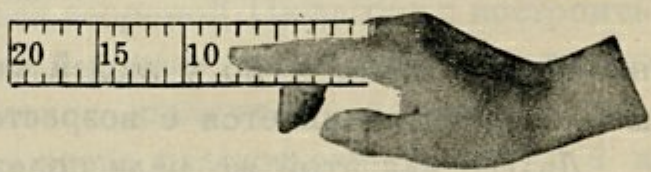
Майнридовский мальчик мог успешно разрешить свою геометрическую задачу только потому, что незадолго до путешествия измерил свой рост и твердо помнил результаты измерения. Хорошо бы каждому из нас обзавестись таким „живым аршином", чтобы в случае нужды пользоваться им для измерения. Полезно также помнить, что у большинства людей расстояние между концами расставленных рук равно росту (рис. 133), — правило, подмеченное гениальным художником и ученым Леонардо да Винчи: оно позволяет пользоваться нашими живыми аршинами удобнее, чем делал это мальчик у Майн-Рида. В среднем, высота взрослого человека (славянской расы) около 1,7 *м*, или 170 *см*; это легко запомнить. Но полагаться на среднюю величину не следует: каждый должен измерить свой рост и размах своих рук.

Для отмеривания — без масштаба — мелких расстояний следует помнить длину свой „четверти", т. е. расстояние между концами расставленных большого пальца и мизинца (рис. 134). У взрослого мужчины оно составляет около 18 *см* — примерно $^1/_4$ аршина (откуда и наз-

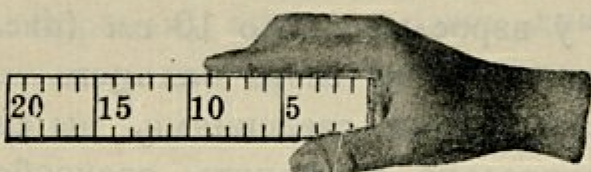
134

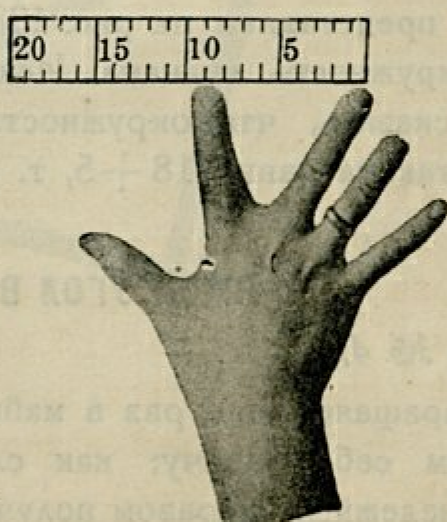


135



136





137

138

вание: „четверть“); но у людей молодых оно меньше, и медленно увеличивается с возрастом (до 25 лет).

Далее, для этой же цели полезно измерить и запомнить длину своего указательного пальца, считая ее двояко: от основания среднего пальца (рис. 135) и от основания большого (рис. 136). Точно также должно быть известно вам наибольшее расстояние между концами указательного и среднего пальцев, — у взрослых около 10 *см* (рис. 137). Надо, наконец, знать и ширину своих пальцев.

Вооруженные всеми этими сведениями, вы сможете довольно удовлетворительно выполнять разнообразные измерения буквально голыми руками, даже и в темноте. Пример представлен на рис. 138: здесь измеряется пальцами окружность стакана. Исходя из средних величин, можно сказать, что окружность изображенного на рисунке стакана равна 18 + 5, т. е. 23 *см*.

ПРЯМОЙ УГОЛ В ТЕМНОТЕ

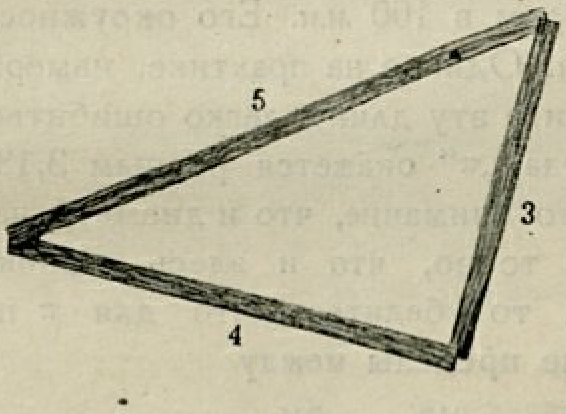
Задача № 47

Возвращаясь еще раз в майн-ридовскому математику, поставим себе задачу: как следовало ему поступить, чтобы надежным образом получить прямой угол? „Я приставил к ней (к выступающей планке) длинный прут так, чтобы он образовал с ней прямой угол“, читаем мы в романе. Делая это в темноте, полагаясь только на мускульные ощущения, мы можем ошибиться довольно крупно. Однако у мальчика в его положении было средство построить прямой угол гораздо более надежным приемом. Каким?

Решение

Надо воспользоваться теоремой Пифагора и построить из планок треугольник, придав его сторонам такую длину, чтобы треугольник получился прямоугольный. Проще всего взять для этого планки длиною в 3, в 4 и в 5 каких-либо произвольно выбранных равных отрезков,— например, ширины ладони (рис. 139).

Это — старинный египетский способ, которым пользовались в стране пирамид несколько тысячелетий тому назад. Впрочем, еще и в наши дни при строительных работах зачастую прибегают к тому же приему.



139

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О КРУГЕ

ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЕГИПТЯН И РИМЛЯН

Любой школьник вычисляет теперь длину окружности по диаметру гораздо точнее, чем мудрейший жрец древней страны пирамид или самый искусный архитектор великого Рима. Древние египтяне считали, что окружность длиннее диаметра в 3,16 раза, а римляне — в 3,12, между тем правильное отношение — 3,14159... Египетские и римские математики установили отношение окружности к диаметру не строгим геометрическим расчетом, как позднейшие математики, а нашли его просто из опыта. Но почему получились у них такие ошибки? Разве не могли они обтянуть какую-нибудь круглую вещь ниткой и затем, выпрямив нитку, просто измерить ее?

Без сомнения, они так и поступали; но не следует думать, что подобный способ должен непременно дать хороший результат. Вообразите, например, вазу с круглым дном диаметром в 100 *мм*. Его окружность должна равняться 314 *мм*. Однако на практике, измеряя ниткой, вы едва ли получите эту длину: легко ошибиться на один миллиметр, и тогда „π“ окажется равным 3,13 или 3,15. А если примете во внимание, что и диаметр вазы нельзя измерить вполне точно, что и здесь ошибка в 1 *мм* весьма вероятна, то убедитесь, что для π получаются довольно широкие пределы между

$$\frac{313}{101} \quad \text{и} \quad \frac{315}{99},$$

т. е., в десятичных дробях, между

$$3{,}09 \quad \text{и} \quad 3{,}18.$$

Вы видите, что, определяя π указанным способом, мы можем получить результат, не совпадающий с 3,14: один раз 3,1, в другой 3,12, в третий 3,17 и т. п. Случайно окажется среди них и 3,14, но в глазах вычислителя это число не будет иметь больше веса чем другие.[1]

Теперь становится более понятным, почему древний мир не знал правильного отношения длины окружности к диаметру, и понадобился гений Архимеда, чтобы найти для π значение $3\frac{1}{7}$ — найти без измерений, одним лишь рассуждением.

„ЧТО Я ЗНАЮ О КРУГАХ"

В „Алгебре" древнего арабского математика Магомета-бен-Муза о вычислении длины окружности читаем такие строки:

„Лучший способ — это умножить диаметр на $3\frac{1}{7}$. Это самый скорый и самый легкий способ. Богу известно лучшее".

Теперь и мы знаем, что Архимедово число, $3\frac{1}{7}$, не вполне точно выражает отношение окружности к диаметру. Теоретически доказано, что отношение это вообще не может быть выражено никаким дробным числом. Мы можем написать его лишь с тем или иным приближением, — впрочем, далеко превосходящим точность, необходимую для самых строгих требований практической жизни. Математик XVI века Лудольф, в Лейдене, имел

---

[1] Получение π опытным путем одно время рекомендовалось некоторыми методистами в нашем школьном обучении; метод этот был очень популярен и считался самым „естественным". Между тем он никак не может дать сколько-нибудь приемлемого значения для π.

терпение вычислить его с 35 десятичными знаками и завещал вырезать это значение для π на своем могильном памятнике.[1]

Вот оно:

3,14159265358979323846264338327950288.

Я знаю его наизусть до 31-й цифры и всегда могу повторить, хотя и не обладаю сверхъестественной памятью. Дело просто: немцы придумали стихотворение, слова которого подобраны так, что числа букв в них отвечают последовательно цифрам этого длинного ряда. Для знающих по-немецки привожу здесь этот единственный в своем роде образчик геометрической поэзии (или поэтической геометрии):

Wie o dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein"

На практике пользоваться таким громоздким π никогда не приходится. Даже если бы мы пожелали вычислить длину земного экватора с точностью до 1 *см*, предполагая, что знаем длину его диаметра вполне точно, — нам достаточно было бы взять π всего с 9 цифрами после запятой. А взяв вдвое больше цифр (18), мы могли бы вычислить длину окружности, имеющей радиусом расстояние от Земли до Солнца, — с погрешностью не свыше 0,0003 *мм* (волос в сто раз толще этой возможной ошибки!). И правильно замечает по этому поводу французский астроном Араго, что

[1] Тогда еще это обозначение „π“ не было в употреблении: оно введено лишь с середины XVIII века знаменитым математиком Эйлером.

„в смысле точности мы ничего не выиграли бы, если бы между длиною окружности и диаметром существовало отношение, выражающееся числом вполне точно“.[1]

Для обычных вычислений с π вполне достаточно запомнить два знака после запятой (3,14), а для более точных — четыре знака (3,1416: берем 6 вместо 5 потому, что далее следует цифра большая 5). Первые шесть слов приведенного раньше немецкого четверостишия помогли бы нам запомнить число 3,14159. Хорошо бы, конечно, придумать подходящие русские стихи. Не отваживаясь на это, позволю себе предложить прозаическую фразу:

3	1	4	1	6
что	я	знаю	о	кругах

— вопрос, скрыто заключающий в себе и ответ: 3,1416.

ЗАДАЧА ДЖЭКА ЛОНДОНА

Следующее место романа Джэка Лондона „Маленькая хозяйка большого дома“ дает материал для геометрического расчета:

„Посредине поля возвышался стальной шест, врытый глубоко в землю. С верхушки шеста к краю поля тянулся трос, прикрепленный к трактору. Механики нажали рычаг, и мотор заработал.

„Машина сама двинулась вперед, описывая окружность вокруг шеста, служившего ее центром.

„— Чтобы окончательно усовершенствовать машину, — сказал Грэхем, — вам остается превратить окружность, которую она описывает, в квадрат.

[1] Тем не менее, математики затратили много труда, чтобы получить для π возможно больше знаков. Математик Шенкс в 1873 г. опубликовал π с 707 десятичными знаками!

„— Да, на квадратном поле пропадает при такой системе очень много земли.

„Грэхем произвел некоторые вычисления, затем заметил:

„— Теряется примерно три акра из каждых десяти.

„— Не меньше".

Предлагаем читателям проверить этот расчет.

Решение

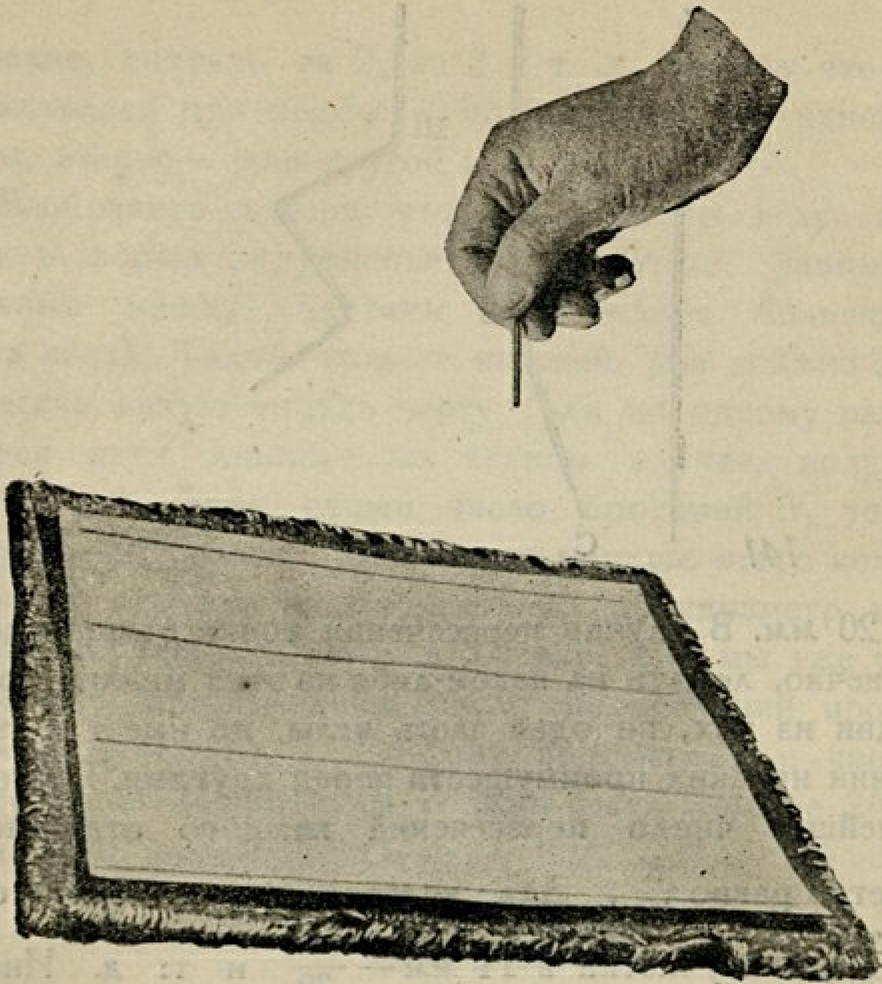
Расчет не верен: теряется меньше чем 0,3. Пусть в самом деле, сторона квадрата — a. Площадь такого квадрата — a^2. Диаметр вписанного круга равен также a, а его площадь — $\frac{\pi a^2}{4}$. Пропадающая часть квадратного участка составляет

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2 = 0{,}22\, a^2.$$

Мы видим, что необработанная часть квадратного поля составляет не 30%, как полагали герои американского романиста, а только 22%.

БРОСАНИЕ ИГЛЫ

Самый оригинальный и неожиданный способ для приближенного вычисления числа π состоит в следующем. Запасаются короткой (сантиметра два) швейной иглой, — лучше с отломанным острием, чтобы игла была равномерной толщины, — и проводят на листе бумаги ряд тонких параллельных линий, отделенных одна от другой расстоянием, вдвое больше длины иглы. Затем роняют с некоторой (произвольной) высоты иглу на бумагу и замечают, пересекает ли игла одну из линий, или нет

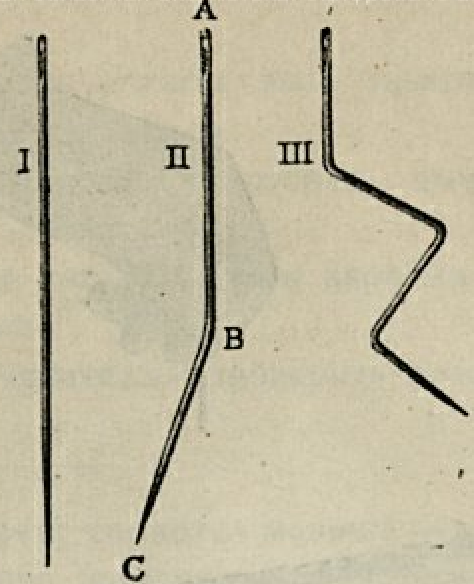


140

(рис. 140). Чтобы при падении игла не подпрыгивала, подкладывают под бумажный лист пропускную бумагу, или сукно. Бросание иглы повторяют много раз, например сто или, еще лучше, тысячу, каждый раз отмечая, было ли пересечение.[1] Если потом разделить общее число падений иглы на число случаев, когда замечено было пересечение, то в результате должно получиться число π, — конечно, более или менее приближенно.

Объясним, почему так получается. Пусть вероятнейшее число пересечений иглы равно K, а длина нашей

[1] Пересечением надо считать и тот случай, когда игла только пирается концом в начерченную линию.



141

иглы — 20 *мм*. В случае пересечения точка встречи должна, конечно, лежать на каком-либо из этих миллиметров, и ни один из них, ни одна часть иглы, не имеет в этом отношении никаких преимуществ перед другими. Поэтому вероятнейшее число пересечений каждого отдельного миллиметра равно $\frac{K}{20}$. Для участка иглы в 3 *мм* оно равно $\frac{3K}{20}$, для участка в 11 *мм* — $\frac{11K}{20}$ и т. д. Иначе говоря, вероятнейшее число пересечений прямо пропорционально длине иглы.

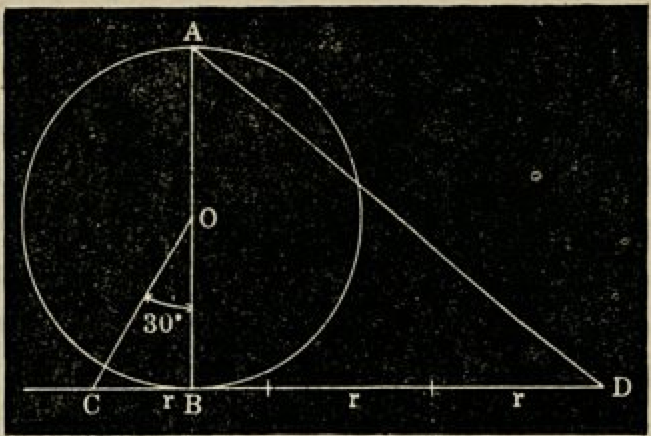
Эта пропорциональность сохраняется и в том случае, если игла согнута. Пусть мы согнули иглу в форме фиг. II рис. 141, причем участок $AB = 11$ *мм*, а $BC = 9$ *мм*. Для части AB вероятнейшее число пересечений $= \frac{11K}{20}$, а для $BC = \frac{9K}{20}$, для всей же иглы $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$, т. е. по-прежнему равно K. Мы можем изогнуть иглу и более затейливым образом (фиг. III, рис. 141), — число пересечений от этого не изменилось бы. (Заметьте, что при изогнутой игле возможны пересечения черты двумя и более частями иглы сразу; такое пересечение надо, конечно, считать за 2, за 3 и т. д., потому что первое зачислялось при подсчете пересечений для одной части иглы, второе — для другой и т. д.).

Вообразите теперь, что мы бросаем иглу, изогнутую в форме окружности с диаметром, равным расстоянию между чертами (оно вдвое больше, чем наша игла). Такое кольцо каждый раз должно дважды пересечь какую-нибудь черту (или по одному разу коснуться двух линий, — во всяком случае, получаются 2 встречи). Если общее число бросаний N, то число встреч — $2N$. Наша прямая игла меньше этого кольца по длине во столько раз, во сколько полудиаметр меньше длины окружности, т. е. в 2π раз. Но мы уже установили, что вероятнейшее число пересечений пропорционально длине иглы. Поэтому вероятнейшее число (K) пересечений нашей иглы должно быть меньше $2N$ в 2π раза, т. е. равно $\frac{N}{\pi}$. Отсюда:

$$\pi = \frac{\text{числу бросаний}}{\text{число пересечений}}.$$

Чем большее число падений наблюдалось, тем точнее получается выражение для π. Один швейцарский астроном, Р. Вольф, в середине прошлого века наблюдал 5000 падений иглы на разграфленную бумагу и получил для π число 3,159...,— выражение, впрочем, менее точное, чем Архимедово число.

Как видите, отношение длины окружности к диаметру находят здесь опытным путем, причем — это всего любопытнее — не чертят ни круга, ни диаметра, т. е. обходятся без циркуля. Человек, не имеющий никакого представления о геометрии и даже о круге, может тем не менее определить по этому способу число π, если терпеливо проделает весьма большое число бросаний иглы.



142

ВЫПРЯМЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Задача № 48

Для многих практических целей достаточно взять для π число $3\frac{1}{7}$ и выпрямить окружность, отложив ее диаметр $3\frac{1}{7}$ раза (деление отрезка на 7 равных частей можно выполнить, как известно, вполне точно). Существуют и другие приближенные способы выпрямления окружности, применяемые на практике при ремесленных работах — столярами, жестяниками и т. п. Не будем здесь рассматривать их, а укажем лишь один довольно простой способ выпрямления, дающий результат с чрезвычайно большой точностью.

Если нужно выпрямить окружность O (рис. 142), то проводят диаметр AB, а в точке B — перпендикулярную к ней прямую CD. Из центра O под углом 30° к AB проводят прямую OC. Затем от точки C откладывают 3 радиуса данной окружности и соединяют полученную точку D с A: прямая AD равна длине полуокружности. Ошибка менее 0,0002.

На чем основано это построение?

Решение

По теореме Пифагора,

$$\overline{CB}^2+\overline{OB}^2=\overline{OC}^2.$$

Обозначив радиус OB через r и имея в виду, что $CB=\frac{OC}{2}$ (как катет, лежащий против угла в 30°) получаем

$$\overline{CB}^2+r^2=4\,\overline{CB}^2,$$

откуда

$$CB=\frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Далее, в треугольнике ABD

$$BD=CD-CB=3r-\frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

$$AD=\sqrt{\overline{BD}^2+4r^2}=\sqrt{\left(3r-\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2+4r^2}=$$

$$=\sqrt{9r^2-2r^2\sqrt{3}+\frac{r^2}{3}+4r^2}=3{,}14153r.$$

Сравнив этот результат с тем, который получается, если взять π с большой степенью точности ($\pi=3{,}141593...$), мы видим, что разница составляет всего 0,00006 r. Если бы мы по этому способу выпрямляли окружность радиусом в 1 *м*, ошибка составляла бы для полуокружности всего 0,00006 *м*, а для полной окружности — 0,00012 *м*, или 0,12 *мм* (примерно толщина волоса).

КВАДРАТУРА КРУГА

Не может быть, чтобы читатель не слыхал никогда о „квадратуре круга“ — о той знаменитейшей задаче геометрии, над которой трудились математики еще 20 веков назад. Я даже уверен, что среди читателей найдутся и такие, которые сами пытались разрешить эту задачу. Еще больше, однако, наберется читателей, которые недоумевают, в чем собственно кроется трудность разрешения этой классически неразрешимой задачи. Многие, привыкшие повторять с чужого голоса, что задача о квадратуре круга неразрешима, не отдают себе ясного отчета ни в сущности самой задачи, ни в трудности ее разрешения.

В математике есть не мало задач, гораздо более интересных и теоретически и практически, нежели задача о квадратуре круга. Но ни одна не приобрела такой популярности, как эта проблема, давно вошедшая в поговорку. Два тысячелетия трудились над ней выдающиеся профессионалы-математики и несметные толпы любителей.

„Найти квадратуру круга“ значит — начертить квадрат, площадь которого в точности равна площади данного круга. Практически задача эта возникает очень часто, но как раз практически она разрешима с любой точностью. Знаменитая задача древности требует, однако, чтобы чертеж выполнен был совершенно точно и притом помощью всего только двух родов чертежных операций:

1) проведением окружности данного радиуса вокруг данной точки;

2) проведением прямой линии через две данные точки.

Короче говоря, необходимо выполнить чертеж, пользуясь только двумя чертежными инструментами: циркулем и линейкой.

В широких кругах не-математиков распространено убеждение, что вся трудность обусловлена тем, что отношение длины окружности к ее диаметру (знаменитое число π) не может быть выражено конечным числом цифр. Это верно лишь постольку, поскольку разрешимость задачи зависит от особенной природы числа π. В самом деле: превращение прямоугольника в квадрат с равной площадью — задача легко и точно разрешимая. Но проблема квадратуры круга сводится ведь к построению — циркулем и линейкой — прямоугольника, оавновеликого данному кругу. Из формулы площади круга, $S = \pi r^2$, или (что то же самое) $S = \pi r \times r$, ясно, что площадь круга равна площади такого прямоугольника, одна сторона которого $= r$, а другая в π раз больше. Значит, все дело в том, чтобы начертить отрезок, который в π раз длиннее данного. Как известно, π не равно в точности ни $3^1/_7$, ни 3,14, ни даже 3,14159. Ряд цифр, выражающих это число, уходит в бесконечность.

Указанная особенность числа π, его иррациональность, установлена была еще в XVIII веке математиками Ламбертом и Лежандром. И все же знание иррациональности π не остановило усилий сведущих в математике „квадратуристов". Они понимали, что иррациональность π сама по себе не делает задачи безнадежной. Существуют иррациональные числа, которые геометрия умеет „строить" совершенно точно. Пусть, например, требуется начертить отрезок, который длиннее данного в $\sqrt{2}$ раз. Число $\sqrt{2}$, как и π, — иррациональное. Тем не менее, ничто не может быть легче, чем начертить искомый отрезок: вспомним, что $a\sqrt{2}$ есть сторона квадрата, вписанного в круг радиуса a.

Каждый школьник легко справляется также и с построением отрезка $a\sqrt{3}$ (сторона равностороннего вписанного треугольника). Не представляет особых затруднений даже построение такого весьма сложного на вид иррационального выражения:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\,,$$

потому что оно сводится к построению правильного 64-угольника.

Как видим, иррациональный множитель, входящий в выражение, не всегда делает это выражение невозможным для построения циркулем и линейкой. Неразрешимость квадратуры круга кроется не всецело в том, что число π иррациональное, а в другой особенности этого же числа. Именно: число π — не алгебраическое, т. е. не может быть получено в итоге решения какого бы то ни было уравнения с рациональными коэффициентами. Такие числа называются „трансцендентными“.

Математик XVI столетия Вьета доказал, что число

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

и т. д.

Это выражение для π разрешало бы задачу о квадратуре круга, если бы число входящих в него операций было конечно (тогда приведенное выражение можно было бы геометрически построить). Но так как число извлечений квадратных корней в этом выражении бесконечно, то выражение Вьета не помогает делу.

Итак, неразрешимость задачи о квадратуре круга обусловлена трансцендентностью числа π, т. е. тем, что оно не может получиться в итоге решения уравнения с рациональными коэффициентами. Эта особенность числа π была строго доказана в 1889 г. немецким математиком Линдеманом. В сущности названный ученый и должен считаться единственным человеком, разрешившим квадратуру круга, несмотря на то, что решение его отрицательное — оно утверждает, что искомое построение геометрически невыполнимо. С 1889 г. завершаются многовековые усилия математиков в этом направлении; но, к сожалению, не прекращаются бесплодные попытки многочисленных любителей, недостаточно знакомых с задачей.

Так обстоит дело в теории. Что касается практики, то она вовсе не нуждается в **точном** разрешении этой знаменитой задачи. Убеждение многих, что разрешение проблемы квадратуры круга имело бы огромное значение для практической жизни — глубокое заблуждение. Для потребностей обихода вполне достаточно располагать хорошими приближенными примерами решения этой задачи.

Практически поиски квадратуры круга стали бесполезны с того времени, как найдены были первые 7—8 верных цифр числа π. Для потребностей практической жизни вполне достаточно знать, что $\pi = 3{,}1415926$. Никакое измерение длины не может дать результата, выражающегося более чем 7-ю значащими цифрами. Поэтому брать для π более 8 цифр — бесполезно: точность вычисления от этого не улучшается.[1] Если радиус выражен 7-ю значащими цифрами, то длина окружности не будет содержать более 7 достоверных цифр, даже если взять для π сотню цифр. То, что старинные математики затратили огромный труд для получения возможно более длинных значений π, никакого практического значения не имеет. Да и научное значение этих трудов ничтожно.

[1] См. „Занимательную арифметику“ Я. И. Перельмана.

Это — попросту дело терпения. Если у вас есть охота и достаточно досуга, вы можете отыскать хоть 1 000 цифр для π, пользуясь, например, следующим бесконечным рядом, найденным Лейбницем:[1]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{и т. д.}$$

Но это будет никому не нужное арифметическое упражнение, нисколько не подвигающее разрешения знаменитой геометрической задачи.

Упомянутый ранее французский астроном Араго писал по этому поводу следующее:

„Искатели квадратуры круга продолжают заниматься решением задачи, невозможность которого ныне положительно доказана, и которое, если бы даже и могло осуществиться, не представило бы никакого практического интереса. Не стоит распространяться об этом предмете: больные разумом, стремящиеся к открытию квадратуры круга, не поддаются никаким доводам. Эта умственная болезнь существует с древнейших времен".

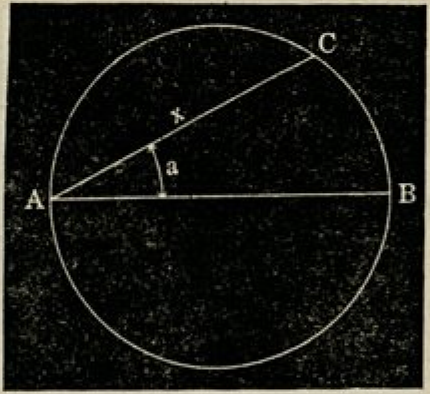
И иронически заканчивает:

„Академии всех стран, борясь против искателей квадратуры, заметили, что болезнь эта обычно усиливается к весне".

Рассмотрим здесь одно из приближенных решений задачи о квадратуре круга, очень удобное для надобностей практической жизни.

Способ состоит в том, что вычисляют (рис. 143) угол a, под которым надо провести к диаметру AB

[1] Терпения для такого расчета потребуется очень много, потому что для получения, например, 6-значного π понадобилось бы взять в указанном ряду ни мало ни много — 2 000 000 членов!



143

хорду $AC = x$, являющуюся стороною искомого квадрата. Чтобы узнать величину этого угла, придется обратиться к тригонометрии:

$$\cos a = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r},$$

где r — радиус круга.

Значит, сторона искомого квадрата $x = 2r \cos a$, площадь же его $= 4r^2 \cos^2 a$. С другой стороны, площадь квадрата равна площади πr^2 данного круга. Следовательно,

$$4r^2 \cos^2 a = \pi r^2,$$

откуда

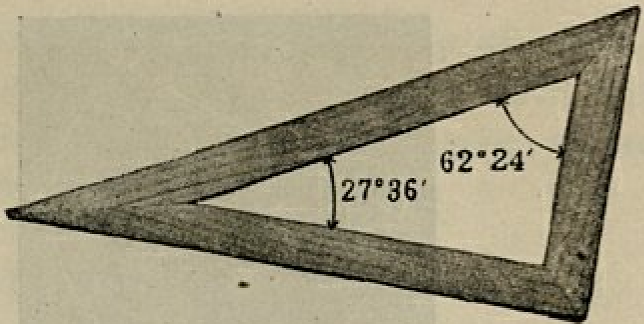
$$\cos^2 a = \frac{\pi}{4}, \ \cos a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886.$$

По таблицам находим

$$a = 27°36'.$$

Итак, проведя в данном круге хорду под углом 27°36′ к диаметру, мы сразу получаем сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга. Практически делают так, что заготовляют чертежный треугольник, [1]

[1] Этот удобный способ был предложен и в 1836 г. русским инженером Бингом; упомянутый чертежный треугольник носит, по имени изобретателя, название „треугольник Бинга“.



144

один из острых углов которого 27°36′ (а другой — 62°24′). Располагая таким треугольником, можно для каждого данного круга сразу находить сторону равновеликого ему квадрата.

Для желающих изготовить себе такой чертежный треугольник полезно следующее указание.

Так как тангенс угла 27°36′ равен 0,523 или $\frac{23}{44}$, то катеты такого треугольника относятся как 23 : 44. Поэтому, изготовив треугольник, один катет которого, например, 22 *см*, а другой 11,5 *см*, мы будем иметь то, что требуется. Само собой разумеется, что таким треугольником можно пользоваться и как обыкновенным чертежным.

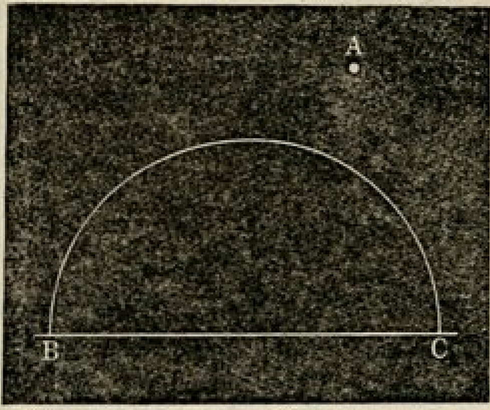
ПОСТРОЕНИЕ БЕЗ ЦИРКУЛЯ

При решении геометрических задач на построение обычно пользуются линейкой и циркулем. Мы сейчас увидим, однако, что иной раз удается обходиться без циркуля в таких случаях, где на первый взгляд он представляется совершенно необходимым.

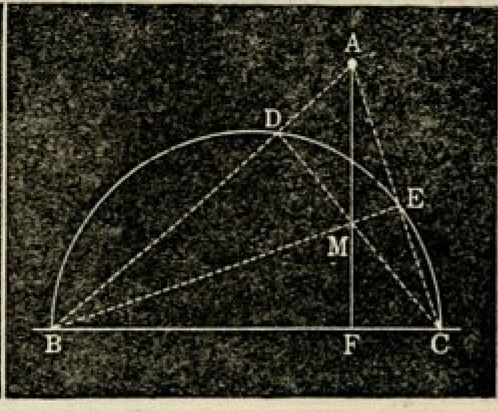
Задача № 49

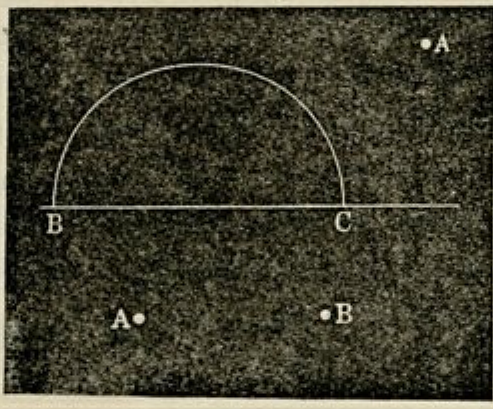
Из точки *A* (рис. 145), лежащей вне полуокружности, опустить на ее диаметр перпендикуляр, обходясь при этом без циркуля. Положение центра полуокружности не указано.

145

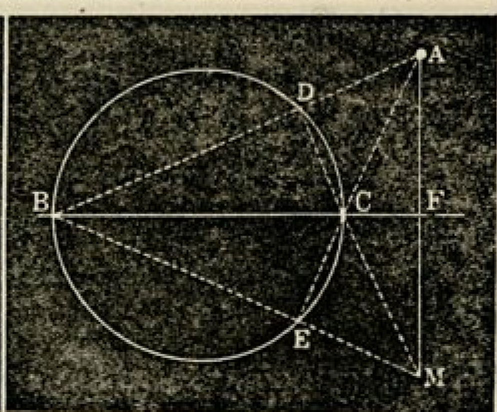


146





147



148

Решение

Нам пригодится здесь то свойство треугольника, что все высоты его пересекаются в одной точке. Соединим A с B и C; получим точки D и E (рис. 146). Прямые BE и CD, очевидно, высоты треугольника ABC. Третья высота — искомый перпендикуляр на BC — должна проходить через точку пересечения двух других, т. е. через M. Проведя по линейке прямую через точки A и M, мы выполним требование задачи, не прибегая к услугам циркуля. Если точка расположена, как на рис. 147, где искомый перпендикуляр падает на продолжение диаметра, то задача была бы разрешима лишь при условии, что дан не полукруг, а полная окружность. Рис. 148 показывает, что решение не отличается от того, с которым мы уже знакомы; только высоты треугольника ABC пересекаются здесь не внутри, а вне его.

ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

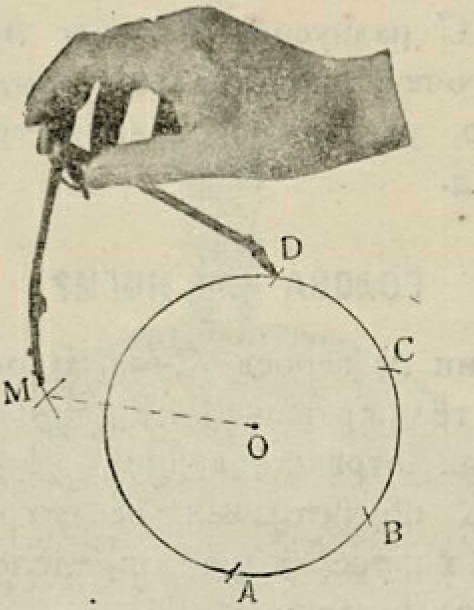
Сейчас мы занимались построением, выполняемым помощью одной лишь линейки, не обращаясь к циркулю (при условии, что одна окружность на чертеже дана заранее). Рассмотрим теперь несколько задач, в которых вводится обратное ограничение: запрещается пользоваться линейкой, а все построения нужно выполнить только циркулем. Одна из таких задач заинтересовала Наполеона I (бывшего, как известно, математиком). Прочтя книгу о таких построениях итальянского ученого Маскерони, он предложил французским математикам следующую задачу.

Задача № 50

Данную окружность разделить на 4 равные части не прибегая к линейке. Положение центра окружности дано.

Решение

Пусть требуется разделить на 4 части окружность O (рис. 149). От произвольной точки A откладываем по окружности три раза радиус круга: получаем точки B, C и D. Легко видеть, что расстояние AC — хорда дуги, составляющей $^1/_3$ окружности, — сторона вписанного равностороннего треугольника и, следовательно, равно $r\sqrt{3}$, где r — радиус окружности. AD, очевидно, диаметр окружности. Из точек A и D радиусом, равным AC, засекаем дуги, пересекающиеся в точке M. Покажем, что



149

расстояние MO равно стороне квадрата, вписанного в нашу окружность. В треугольнике AMO катет

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2},$$ т. е. стороне вписанного квадрата. Теперь остается только отложить по окружности расстояние MO, чтобы получить вершины вписанного квадрата, которые, очевидно, разделят окружность на 4 равные части.

Задача № 51

Вот другая, более легкая задача в том же роде.

Без линейки увеличить расстояние между данными точками A и B в 5 раз, — вообще, в заданное число раз.

Решение

Из точки B радиусом AB описываем окружность (рис. 150). По этой окружности откладываем от точки A расстояние AB три раза: получаем точку C, очевидно, диаметрально противоположную A. Расстояние AC представляет собой двойное расстояние AB. Проведя окружность из C радиусом BC, мы можем таким же образом найти точку, диаметрально противоположную B и, следовательно, удаленную от A на тройное расстояние AB, — и т. д.

ГОЛОВА ИЛИ НОГИ?

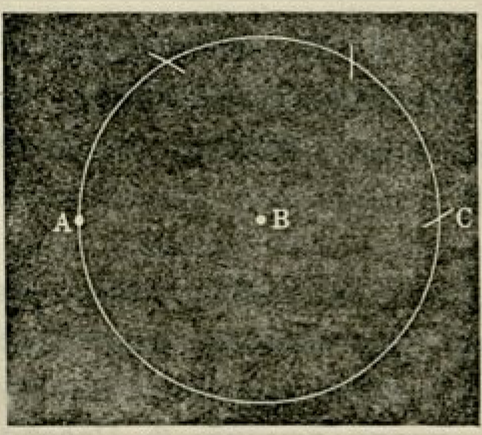
Кажется, один из героев Жюля Верна подсчитывал, какая часть его тела прошла более длинный путь за время его кругосветных странствований — голова или ступни ног. Это очень поучительная геометрическая задача, если поставить вопрос более определенным образом. Мы предложим ее в таком виде.

Задача № 52

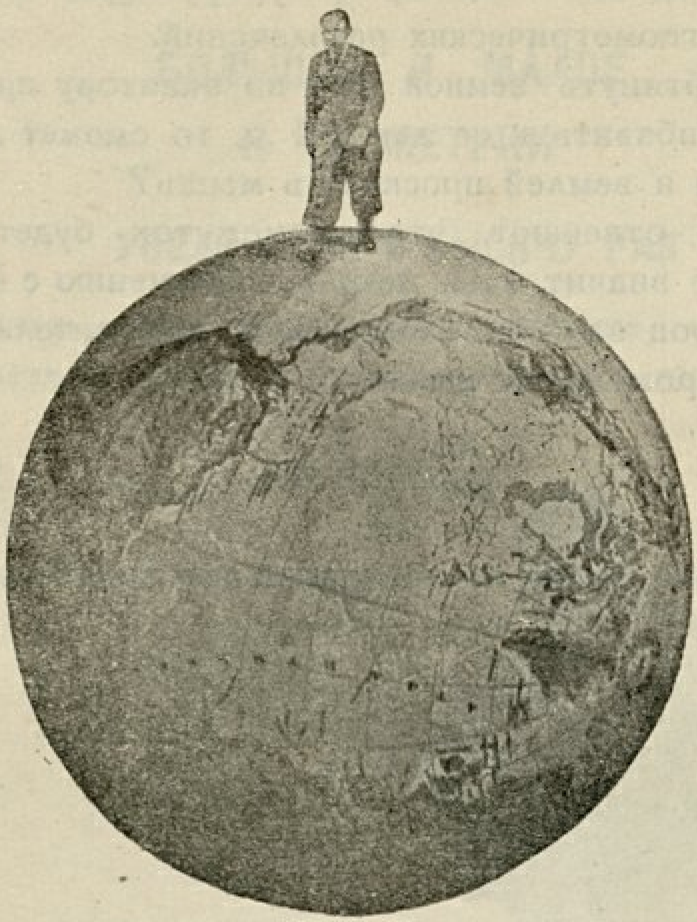
Вообразите, что вы обошли земной шар по экватору. Насколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

Решение

Ноги прошли путь $2\pi R$, где R — радиус земного шара. Верхушка же головы прошла при этом $2\pi(R+1{,}7)$,



150



151

где 1,7 *м* — рост человека. Разность путей равна $2\pi(R+1{,}7)-2\pi R=2\pi\cdot 1{,}7=10{,}7$ *м*. Итак голова прошла путь на 10,7 *м* больше, чем ноги.

Любопытно, что в окончательный ответ не входит величина радиуса земного шара. Поэтому результат получится одинаковый и на Земле, и на Юпитере, и на самой мелкой планетке. Вообще, разность длин двух концентрических окружностей не зависит от их радиусов, а только от расстояния между ними. Прибавка одного сантиметра к радиусу земной орбиты увеличила бы ее длину ровно на столько, на сколько удлинится от такой же прибавки радиуса окружность медного пятака.

На этом геометрическом парадоксе[1] основана следующая любопытная задача, фигурирующая во многих сборниках геометрических развлечений.

Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и затем прибавить к ее длине 1 *м*, то сможет ли между проволокой и землей проскочить мышь?

Обычно отвечают, что промежуток будет тоньше волоса: что значит один метр по сравнению с 40 миллионами метров земного экватора! В действительности же величина промежутка равна:

$$\frac{100}{2\pi} = 16\ см.$$

Не только мышь, но и крупный кот проскочит в такой промежуток.

---

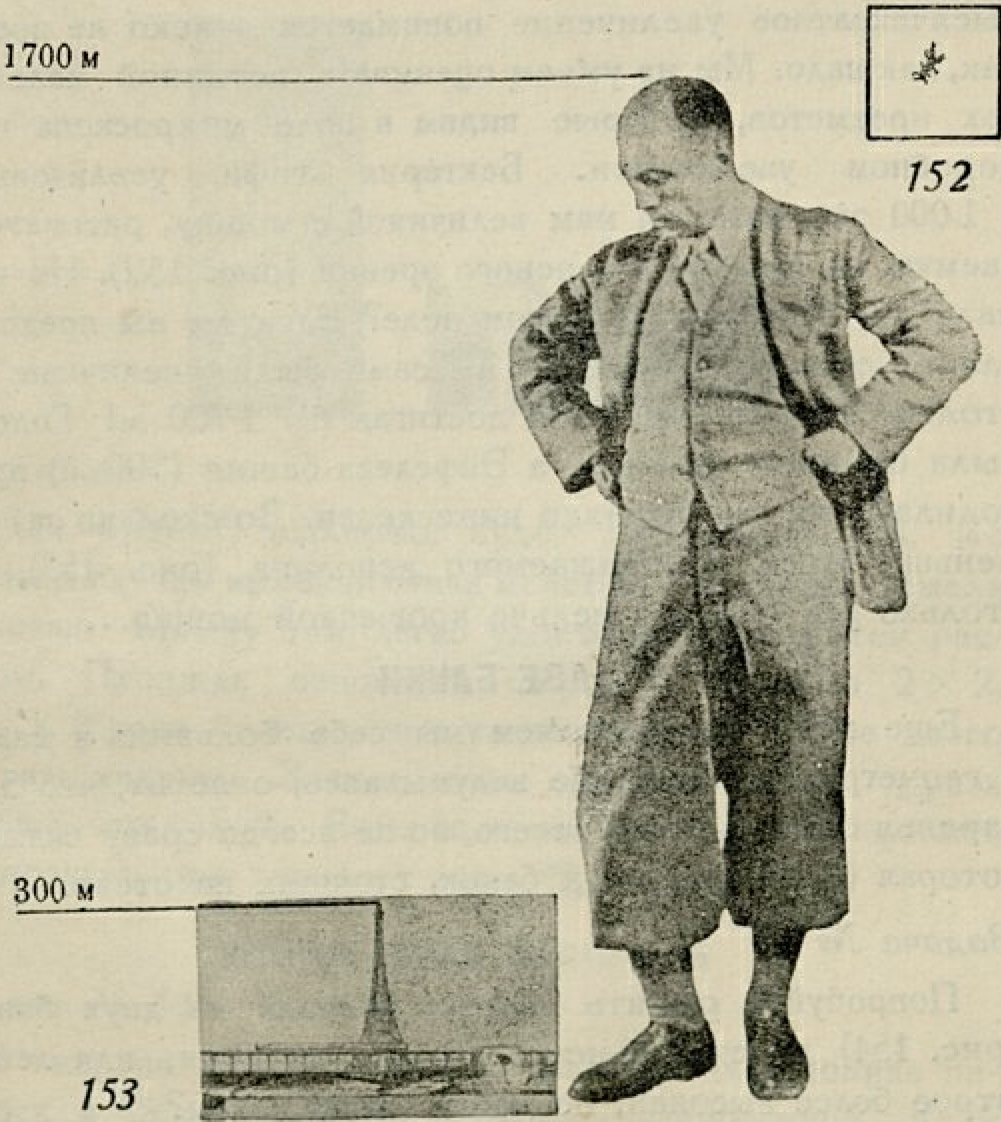
[1] **Парадоксом** называется истина, кажущаяся неправдоподобной, — в отличие от **софизма** — ложного положения, имеющего видимость истинного.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

БОЛЬШОЕ И МАЛОЕ В ГЕОМЕТРИИ

УВЕЛИЧЕНИЕ В ТЫСЯЧУ РАЗ

Отличить, что больше и что меньше, очень просто в арифметике, когда вопрос поставлен о числах. Но не



152

153

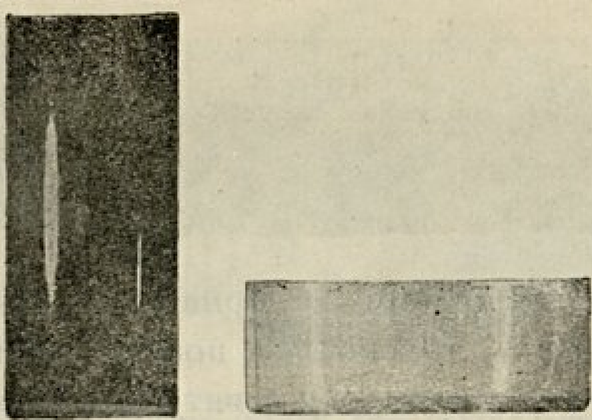
всегда легко разрешить подобный вопрос в геометрии, где приходится сравнивать не числа, а поверхности и объемы. Впрочем, и в арифметике мы не всегда представляем себе отчетливо те числа, о которых говорим. Мало кто, например, имеет ясное представление о таких числовых исполинах, как миллион или биллион. Даже и более скромные числа рисуются в нашем воображении довольно смутно. Что представляете вы себе, когда вам говорят о микроскопе, увеличивающем в 1000 раз? Не такое уж большое число тысяча, а между тем тысячекратное увеличение понимается далеко не всеми так, как надо. Мы не умеем оценивать истинной малости тех предметов, которые видим в поле микроскопа при подобном увеличении. Бактерия тифа, увеличенная в 1000 раз, кажется нам величиной с мошку, рассматриваемую на расстоянии ясного зрения (рис. 152). Но как мала эта бактерия на самом деле? Едва ли вы представляете себе, что если бы вы сами были увеличены во столько же раз, рост ваш достигал бы 1700 *м*! Голова была бы выше облаков, а Эйфелева башня (300 *м*) приходилась бы вам гораздо ниже колен. Во сколько раз вы меньше этого воображаемого исполина (рис. 153), во столько раз бацилла мельче крошечной мошки...

ДВЕ БАНКИ

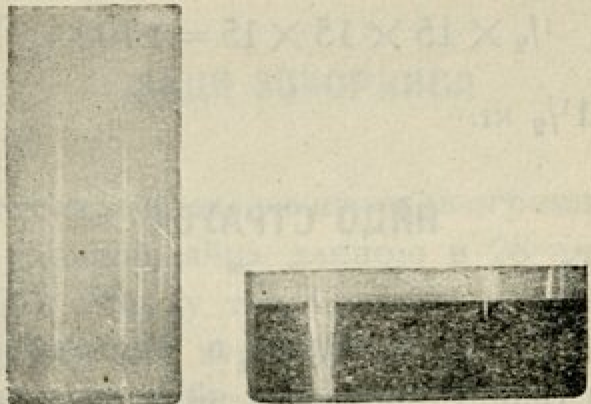
Еще хуже представляем мы себе большое и малое в геометрии. Каждый, не задумываясь, ответит, что 5 *кг* варенья больше, чем 3 *кг* его, но не всегда сразу скажет, которая больше из двух банок, стоящих на столе.

Задача № 53

Попробуйте решить задачу: которая из двух банок (рис. 154) вместительнее — правая, широкая, или левая втрое более высокая, но вдвое более узкая?



154



155

Решение

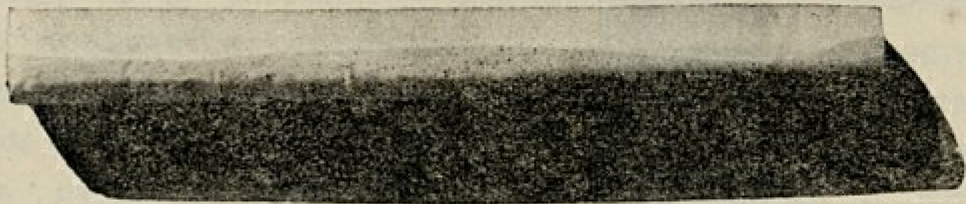
Для многих, вероятно, будет неожиданностью, что в нашем случае высокая банка менее вместительна, нежели широкая. Между тем, легко удостовериться в этом расчетом. Площадь основания широкой банки в 2×2, т. е. в 4 раза больше, чем узкой: высота же ее всего в 3 раза меньше. Значит, объем широкой банки в $^4/_3$ раза больше, чем узкой. Если содержимое высокой перелить в широкую, оно заполнит лишь $^3/_4$ ее (рис. 155).

ИСПОЛИНСКАЯ ПАПИРОСА

Задача № 54

В витрине табачного треста выставлена огромная папироса, в 15 раз длиннее и толще обыкновенной. Если

156



на набивку одной папиросы нормальных размеров нужно полграмма табаку, то сколько понадобилось, чтобы набить исполинскую папиросу в витрине? (рис. 156).

Решение

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 15 = 1700 \text{ г},$$

т. е. свыше $1\frac{1}{2}$ *кг*.

ЯЙЦО СТРАУСА

Задача № 55

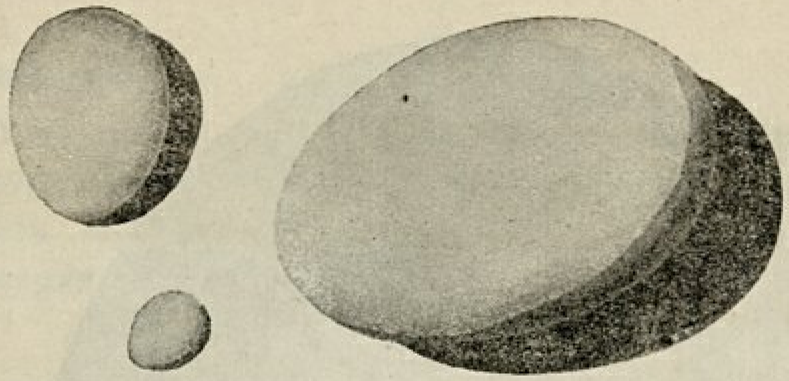
На рис. 157 изображены в одинаковом масштабе яйцо курицы (внизу налево) и яйцо страуса (вверху налево). Всмотритесь в рисунок и скажите, во сколько раз содержимое страусового яйца больше куриного. При беглом взгляде кажется, что разница не может быть весьма велика. Тем поразительнее результат, получаемый правильным геометрическим расчетом.

Решение

Непосредственным измерением на чертеже убеждаемся, что яйцо страуса длиннее куриного в $2\frac{1}{2}$ раза. Следовательно, объем страусового яйца больше объема куриного в

$$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{125}{8},$$

т. е. примерно в 15 раз.



157

Одним таким яйцом могла бы позавтракать семья из 5 человек, считая, что каждый удовлетворяется яичницей из трех яиц.

ЯЙЦО ЭПИОРНИСА

Задача № 56

На Мадагаскаре водились некогда огромные страусы — эпиорнисы, клавшие яйца длиною в 28 *см* (правая фигура рис. 157). Между тем, куриное яйцо имеет в длину 5 *см*. Скольким же куриным яйцам соответствует по объему одно яйцо мадагаскарского страуса?

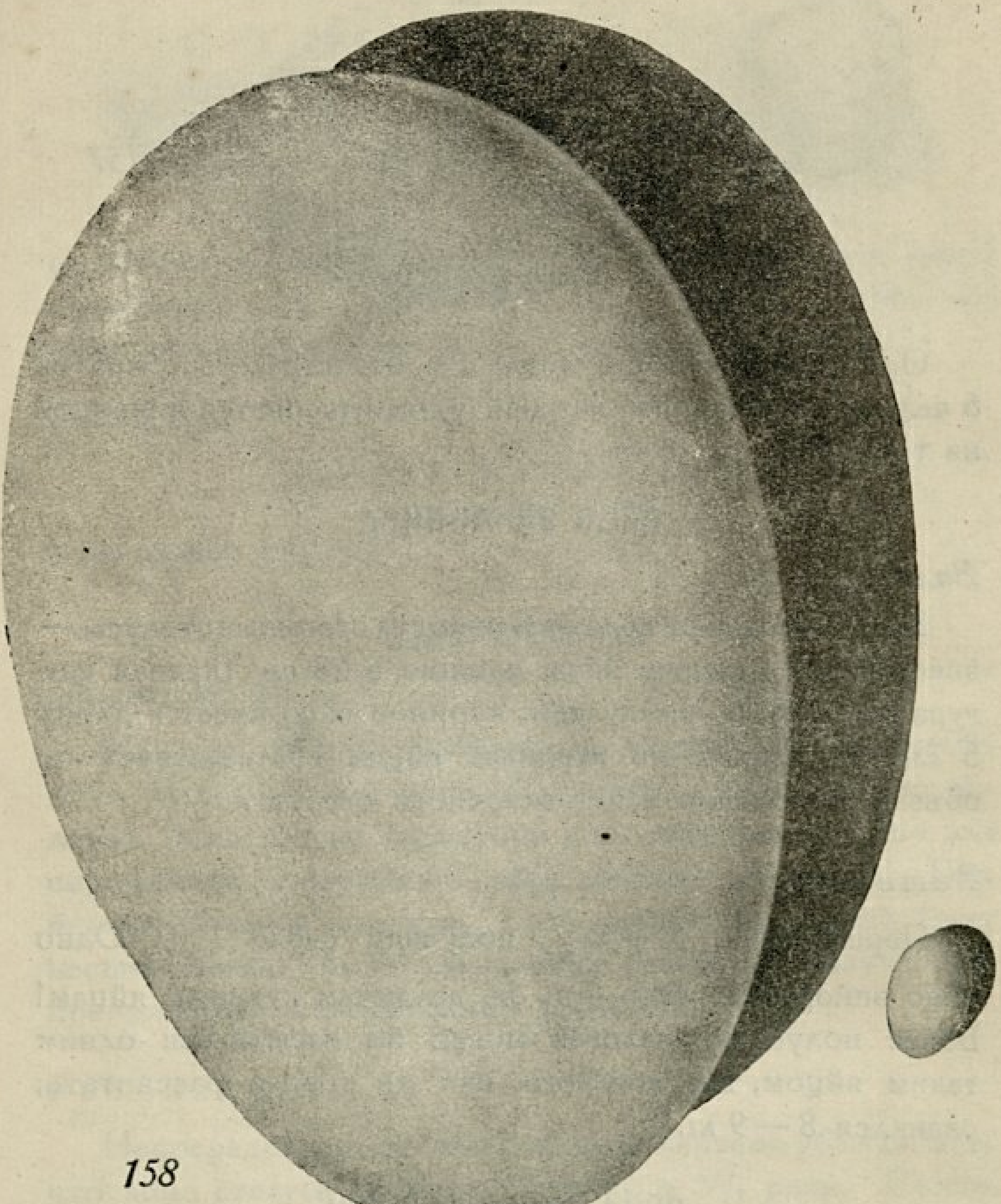
Решение

Перемножив $\frac{28}{5} \times \frac{28}{5} \times \frac{28}{5}$, получаем около 170. Одно яйцо эпиорниса равно чуть не двумстам куриным яйцам! Более полусотни человек могло бы насытиться одним таким яйцом, вес которого, как не трудно рассчитать, равнялся 8 — 9 *кг*.

ЯЙЦА РУССКИХ ПТИЦ

Задача № 57

Самый резкий контраст в размерах получится, однако, тогда, когда обратимся к нашей родной природе и сравним яйца лебедя-шипуна и желтоголового королька, ми-



158

ниатюрнейшей из всех русских птичек. На рис. 158 контуры этих яиц изображены в натуральную величину.

Каково отношение их объемов?

Решение

Измерив длину обоих яиц, получаем 125 *мм* и 13 *мм*. Измерив также и их ширину, имеем 80 *мм* и 9 *мм*. Легко видеть, что эти числа близки к пропорциональности; проверяя пропорцию

$$\frac{125}{80}=\frac{13}{9}$$

сравнением произведений крайних и средних ее членов, имеем

$$1\,125 \text{ и } 1\,040,$$

— числа мало разнящиеся. Отсюда заключаем, что, приняв эти яйца за тела, геометрически подобные, мы не сделаем большой погрешности. Поэтому отношение их объемов примерно равно

$$\frac{80^3}{9^3}=\frac{512000}{730}=700.$$

Итак, яйцо лебедя раз в 700 объемистее яйца королька!

РАЗМЕРЫ НАШИХ МОНЕТ

Вес наших медных монет пропорционален их достоинству, т. е. медная двухкопеечная монета весит вдвое больше копеечной, трехкопеечная — втрое и т. д. То же справедливо и для разменного серебра: двугривенный, например, вдвое тяжелее гривенника. Наконец, и полноценные серебряные монеты (1 р. и 50 коп.) чеканились по тому же правилу. А так как однородные монеты обычно имеют геометрически подобную форму, то, зная диаметр одной медной монеты, одной разменной серебряной и одной полноценной, можно вычислить диаметры всех прочих. Приведем примеры таких расчетов.

25 мм

159

Задача № 58

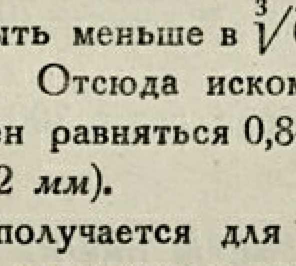
Диаметр пятака равняется 25 *мм*. Каков диаметр трехкопеечной монеты?

Решение

Вес, а следовательно, и объем трехкопеечной монеты составляет $\frac{3}{5}$, т. е. 0,6 объема пятака. Значит, линейные ее размеры должны быть меньше в $\sqrt[3]{0,6}$, т. е. составлять 0,84 размеров пятака. Отсюда искомый диаметр 3-копеечной монеты должен равняться $0,84 \times 25$, т. е. 21 *мм* (в действительности 22 *мм*).

Лучшее согласие получается для полноценного серебра: диаметр рубля относится к диаметру полтинника как $33,5 : 26,67 = 1,26$, т. е. теоретическому отношению $1 : \sqrt[3]{2}$. Это показывает, что рублевая монета и полтинник представляют собою геометрически подобные цилиндры.

21 мм



160

161

МОНЕТА В МИЛЛИОН РУБЛЕЙ

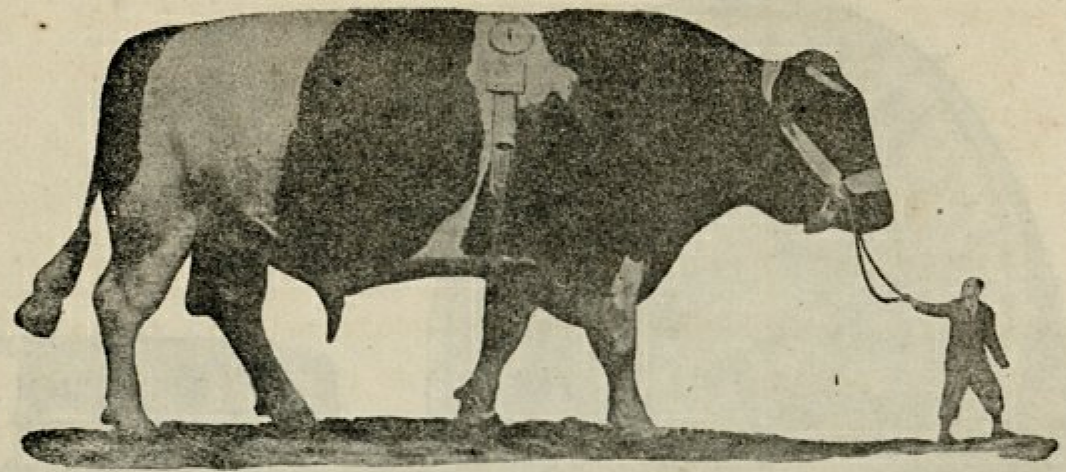
Задача № 59

Вообразите серебряную монету в миллион рублей, которая имеет ту же форму, что и полтинник. Какого, примерно, диаметра была бы такая монета? Если бы ее поставить на ребро рядом с автомобилем, то во сколько раз одно было бы выше другого?

Решение

Размеры монеты были бы не так огромны, как можно думать. Диаметр ее был бы всего 3,3 *м* — не выше одного этажа. В самом деле: раз объем ее больше объема полтинника в 2 000 000 раз, то диаметр (а также толщина) больше в $\sqrt[3]{2\,000\,000}$, т. е. всего в 126 раз.

Умножив 2,7 *мм* на 126, получаем 3,3 *м* — размеры,



162

неожиданно скромные для монеты такого достоинства.[1] Зато вес ее очень внушителен: 10 *г* × 2 000 000 = 20 *т*.

НАГЛЯДНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Читатель, на предыдущих примерах приобревший навык в сравнении объемов геометрически подобных тел по их линейным размерам, не даст уже застигнуть себя врасплох вопросами такого рода. Он легко сможет поэтому избегнуть ошибки некоторых мнимо-наглядных изображений, зачастvю появляющихся в иллюстрированных журналах

Задача № 60

Вот пример таких изображений. Если человек съедает в день, круглым и средним счетом, 400 *г* мяса, то за 60 лет жизни это составит около 9 *т*. А так как вес быка — около $^1/_2$ *т*, то человек к концу жизни может утверждать, что съел 18 быков. Если бы изобразить

[1] До чего ошибаются иной раз в подобных оценках, видно из того, что при решении этой задачи мне случилось слышать утверждение, будто диаметр искомой монеты в миллион раз превышает диаметр полтинника, т. е. имеет ни много, ни мало — 27 *км*!..

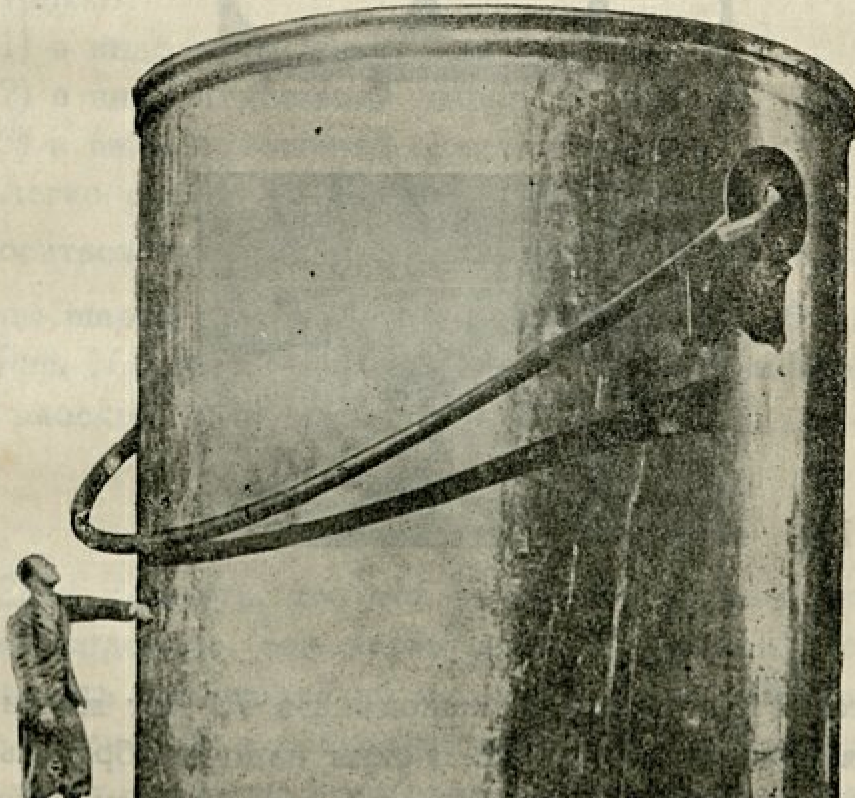
рядом с человеком такого быка, который по объему в 18 раз больше объема нормального быка, то каковы были бы правильные пропорции?

Решение

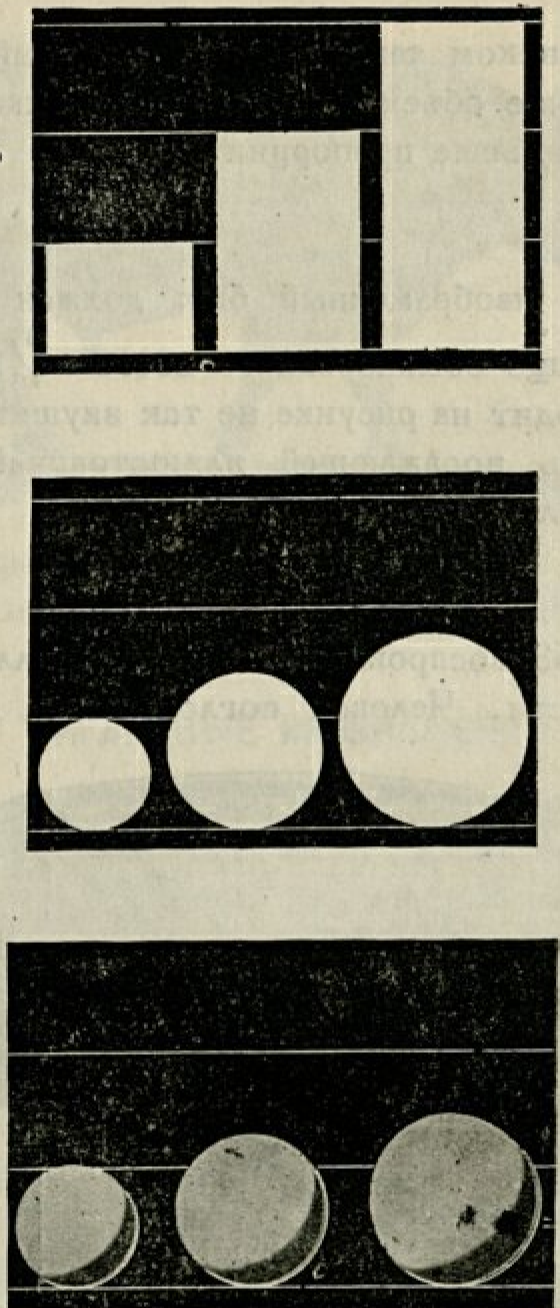
Правильно изображенный бык должен быть выше, длиннее и толще обыкновенного всего в $\sqrt[3]{18}$, т. е. в 2,6 раза; это выходит на рисунке не так внушительно, чтобы могло служить поражающей иллюстрацией количества съедаемого человеком мяса (рис. 162).

Задача № 61

На рис. 163 воспроизведена другая иллюстрация из той же области. Человек поглощает в день разных



163



164

жидкостей $1^1/_2$ *л* (7—8 стаканов). За 70 лет жизни это составляет около 40 000 *л*. Каким надо изобразить рядом с человеком ведро, вмещающее всю ту воду, которую он выпивает в течение целой жизни?

Решение

Ведро-гигант должно быть выше и шире обыкновенного только в $\sqrt{3300}$ или круглым счетом в 15 раз. Если высота и ширина нормального ведра 30 *см*, то для вмещения всей воды, выпиваемой нами за целую жизнь, достаточно было бы ведро высотою 4,5 *м* и такой же ширины. На рис. 163 изображена эта посудина в правильном масштабе.

Рассмотренные примеры показывают, между прочим, что изображение статистических чисел в виде **объемов** тел недостаточно наглядно, не производит того впечатления, какое обычно ожидают. Столбчатые диаграммы в этом отношении имеют несомненное преимущество. В самом деле, возьмем отношение 1:2:3 и представим их трояко:

1) в виде отношений длин полосок;
2) в виде отношений площадей кругов;
3) в виде отношений объемов шаров.

Легко рассчитать, что поперечники кругов должны относиться как $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$, т. е. как 1:1,41:1,76, а диаметры шаров как $1:\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{3}$, т. е. как 1:1,26:1,44.

Рис. 164 показывает, насколько столбики выразительнее плоских кружков и особенно шаров.

НАШ НОРМАЛЬНЫЙ ВЕС

Если принять, что все человеческие тела геометрически подобны (это верно лишь в среднем), то можно вычислять вес людей по их росту (средний рост человека равен 1,75 *м*, а средний вес — 65 *кг*). Получающиеся при таких расчетах результаты могут многим показаться неожиданными.

Предположим, что вы ниже среднего роста на 10 *см*. Какой вес тела является для вас нормальным?

В обиходе часто решают эту задачу так: скидывают с нормального веса такой процент, какой 10 *см* составляют от нормального роста. В данном случае, например, уменьшают 65 *кг* на $^{10}/_{175}$ и полученный вес — 62 *кг* — считают нормальным.

Это — тот же самый неправильный расчет, который доводит иных вычислителей до монеты в 27 *км* диаметром (см. подстрочное примечание на стр. 256).

Правильный вес получится, если вычислять его из пропорции

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}65^3.$$

Откуда:

$$x = \text{около } 54 \text{ кг}.$$

Разница с обычно получаемым результатом весьма значительна — 8 *кг*.

Наоборот, для человека, рост которого на 10 *см* выше среднего, нормальный вес вычисляется из пропорции:

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}85^3.$$

Из нее $x = 78$ *кг*, т. е. на 13 *кг* больше среднего. Эта прибавка гораздо значительнее, чем обычно думают.

Несомненно, что подобные расчеты, правильно выполненные, должны иметь немаловажное значение в медицинской практике при определении нормального веса, при исчислении дозы лекарств и т. п.

ВЕЛИКАНЫ И КАРЛИКИ

Каково же, в таком случае, должно быть отношение между весом великана и карлика? Многим, я уверен, покажется неправдоподобным, что великан может быть в 50 раз тяжелее карлика. Между тем, к этому приводит правильный геометрический расчет.

Один из высочайших великанов, существование которого хорошо удостоверено, был австриец Винкельмейер, в 278 *см* высоты; другой, эльзасец Края, был ростом в 275 *см*; третий англичанин О'Брик, — о котором рассказывали, что он закуривал трубку от уличных фонарей, — достигал 268 *см*. Все они были на целый метр выше человека нормального роста. Напротив, карлики достигают во взрослом состоянии около 75 *см* — на метр ниже нормального роста. Каково же отношение объема и веса великана к объему и весу карлика? Оно равно

$$275^3 : 75^3, \text{ или } 11^3 : 3^3 = 49.$$

Значит, великан равен, по весу, почти полусотне карликов!

А если верить сообщению об арабской карлице Агибе, ростом в 38 *см*, то это отношение станет еще разительнее: высочайший великан в 7 раз выше этой карлицы и, следовательно, тяжелее в 343 раза. Более достоверно сообщение Бюффона, измерившего карлика в 43 *см* ростом: этот карлик в 260 раз легче великана.

ГЕОМЕТРИЯ ГУЛЛИВЕРА

Автор „Путешествия Гулливера“ с большой осмотрительностью избежал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лилипутов нашему футу соответствовал дюйм, а в стране великанов, наоборот, дюйму — фут. Другими словами, у лилипутов все люди, все вещи, все произведения природы были в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако, сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы в роде следующих:

1) во сколько раз Гулливер съедал за обедом больше, чем лилипут?

2) во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лилипутам?

3) сколько весило яблоко страны великанов?

Автор „Путешествия“ справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лилипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объем его тела меньше в $12 \times 12 \times 12$, т. е. в 1728 раз, следовательно, для насыщения тела Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лилипута. И мы читаем в „Путешествии“ такое описание обеда Гулливера:

„Триста поваров готовили для меня кушанье. Вокруг моего дома были поставлены шалаши, где происходила стряпня и жили повара со своими семьями. Когда наступал час обеда, я брал в руки 20 человек прислуги и ставил их на стол, а человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили боченки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху, по мере надобности, поднимали все это на стол при помощи веревок и блоков...“

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливеру. Поверхность его тела больше, чем у лилипутов, в $12 \times 12 = 144$ раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т. п. Все это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему „было прикомандировано 300 портных-лиллипутов с наказом сшить полную пару платья по местным образцам". (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчеты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Если у Пушкина в „Евгении Онегине", как утверждает поэт, „время расчислено по календарю", то в „Путешествиях" Свифта все размеры согласованы с правилами геометрии. Лишь изредка надлежащий масштаб не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются крупные ошибки.

„Один раз, — рассказывает Гулливер, — с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул ее над моей головой. Град яблок, величиной каждое с хороший боченок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног..."

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако, легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающий: ведь яблоко в 1728 раз тяжелее нашего, т. е. весом в 80 кило, обрушилось с 12-кратной высоты: Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве лишь с энергией артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчете мускульной силы великанов. Мы уже видели в первой главе, что мощь крупных животных не пропорциональна их размерам. Если применить приведенные там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше силы Гулливера, вес их тела был больше в 1728 раз. И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и еще, примерно, такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчета.[1]

ПОЧЕМУ ПЫЛЬ И ОБЛАКА ПЛАВАЮТ В ВОЗДУХЕ?

„Потому что они легче воздуха“, — вот обычный ответ, который представляется многим до того бесспорным, что не оставляет никаких поводов к сомнению. Но такое объяснение, при его подкупающей простоте, совершенно ошибочно. Пылинки не только не легче воздуха, они тяжелее его в сотни, даже тысячи раз. Что такое „пылинка“? Мельчайшие частицы различных тяжелых тел: осколки камня или стекла, крупинки угля, дерева, металлов, волокна тканей и т. п. Разве все эти материалы легче воздуха? Простая справка в таблице удельных весов убедит вас, что каждый из них либо в несколько раз тяжелее воды, либо легче ее всего в 2—3 раза. А вода тяжелее воздуха раз в 800; следовательно, пылинки тяжелее его в несколько сот, если не тысяч раз. Теперь очевидна вся несообразность ходячего взгляда на причину плавания пылинок в воздухе.

Какова же истинная причина? Прежде всего надо заметить, что обычно мы неправильно представляем себе самое явление, рассматривая его как п л а в а н и е. Пла-

---

[1] См. подробнее об этом в „Занимательной механике“ Перельмана.

вают — в воздухе (или жидкости) — только такие тела, вес которых не превышает веса равного объема воздуха (или жидкости). Пылинки же превышают этот вес во много раз; поэтому плавать в воздухе они не могут. Они и не плавают, а парят, т. е. медленно опускаются, задерживаемые в своем падении сопротивлением воздуха. Падающая пылинка должна проложить себе путь между частицами воздуха, расталкивая их или увлекая с собой. На то и другое расходуется энергия падения. Расход тем значительнее, чем больше поверхность тела (точнее — площадь поперечного сечения) по сравнению с весом. При падении крупных, массивных тел мы не замечаем замедляющего действия сопротивления воздуха, так как их вес значительно преобладает над противодействующей силой.

Но посмотрим, что происходит при уменьшении тела. Геометрия поможет нам разобраться в этом. Не трудно сообразить, что с уменьшением объема тела вес уменьшается гораздо больше, чем площадь поперечного сечения: уменьшение веса пропорционально третьей степени линейного сокращения, а ослабление сопротивления пропорционально поверхности, т. е. второй степени линейного уменьшения. Вообразите, что шар заменен другим, поперечник которого в 10 раз меньше: объем его меньше, чем у крупно шара, в $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ раз, а поверхность — только в $10 \times 10 = 100$ раз. Теперь понятно, почему для весьма мелких крупинок сопротивление воздуха так значительно по сравнению с их весом, и почему скорость их падения уменьшается до едва заметной величины. Водяная капелька радиусом 0,001 *мм* падает в воздухе равномерно со скоростью 0,1 *мм* в секунду; достаточно ничтожного неуловимого для нас течения воздуха, чтобы помешать такому медленному па-

Орловская областная библиотека. Оцифровано в 2016 г.

дению. Вот почему в комнатах, где много ходят, пыли осаждается меньше, чем в нежилых помещениях, а днем меньше, чем ночью — хотя казалось бы, должно происходить обратное: осаждению мешают возникающие в воздухе вихревые течения, которых обычно почти не бывает в спокойном воздухе мало посещаемых помещений.

Если каменный кубик в 1 *см* высотою раздробить на кубические пылинки высотою в 0,0001 *мм*, то общая поверхность той же массы камня увеличится в 10000 раз и во столько же раз возрастет сопротивление воздуха ее движению. Пылинки нередко достигают именно таких размеров, и понятно, что сильно возросшее сопротивление воздуха совершенно меняет картину падения.

По той же причине „плавают" в воздухе облака. Давно отвергнут устарелый взгляд, будто облака состоят из водяных пузырьков, наполненных водяным паром. Облака — скопление огромного множества чрезвычайно мелких, но сплошных водяных капелек. Капельки эти хотя тяжелее воздуха раз в 800, все же почти не падают; они опускаются с едва заметною скоростью. Сильно замедленное падение объясняется, как и для пылинок, огромной их поверхностью, по сравнению с весом.

Главная причина, обусловливающая все эти явления, — присутствие воздуха: в пустоте и пылинки и облака (если бы могли существовать) падали бы столь же стремительно, как и тяжелые камни.

Излишне добавлять, что медленное падение человека с парашютом (около 5 *м/сек*) принадлежит к явлениям подобного же порядка.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИЯ

КАК ПАХОМ ПОКУПАЛ ЗЕМЛЮ

(задача Льва Толстого)

Эту главу — необычное название которой станет понятно читателю из дальнейшего — начнем отрывком из общеизвестного рассказа Л. Н. Толстого „Много ли человеку земли нужно".

„— А цена какая будет? — говорит Пахом.

„— Цена у нас одна: 1000 руб. за день.

„Не понял Пахом.

„— Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

„— Мы этого, — говорит, — не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена 1000 руб.

„Удивился Пахом.

„— Да ведь это, — говорит, — в день обойти земли много будет.

„Засмеялся старшина.

„— Вся твоя, — говорит. — Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

„— А как же, — говорит Пахом, — отметить, где я пройду?

„— А мы станем на место, где ты облюбуешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скребку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дерничкн клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.

„Разошлись башкирцы. Обещались завтра на зорьке собраться, до солнца на место выехать.

„Приехали в степь, заря занимается. Подошел старшина к Пахому, показал рукой.

„— Вот, — говорит, — все наше, что глазом окинешь. Выбирай любую.

„Снял старшина шапку лисью, поставил на землю.

„— Вот, — говорит, — метка будет. Отсюда поди, сюда приходи. Что обойдешь, все твое будет.

„Только брызнуло из-за края солнце, вскинул Пахом скребку на плечо и пошел в степь.

„Отошел с версту, остановился, вырыл ямку. Пошел дальше. Отошел еще, вырыл еще другую ямку.

„Верст 5 прошел. Взглянул на солнышко, — уже время об завтраке. „Одна упряжка прошла, — думает Пахом.— А их четыре во дню, рано еще заворачивать. Дай пройду еще верст пяток, тогда влево загибать начну“. Пошел еще напрямик. „Ну, — думает, — в эту сторону довольно забрал; надо загибать“. Остановился, вырыл ямку побольше и загнул круто влево.

„Прошел еще и по этой стороне много; загнул второй угол. Оглянулся Пахом на шихан (бугорок): от тепла затуманился, а сквозь мару чуть виднеются люди на шихане. „Ну, — думает, — длинны стороны взял, надо эту покороче взять“. Пошел третью сторону. Посмотрел на солнце,—уж оно к полднику подходит, а по третьей стороне всего версты две прошел. И до места все те же верст 15. „Нет, — думает, — хоть кривая дача будет, а надо прямиком поспевать“.

„Вырыл Пахом поскорее ямку и повернул прямиком к шихану.

„Идет Пахом прямо на шихан, и тяжело уж ему стало. Отдохнуть хочется, а нельзя, — не поспеешь дойти до заката. А солнце уж недалеко от края.

„Идет так Пахом; трудно ему, а все прибавляет да прибавляет шагу. Шел, шел — все еще далеко; побежал рысью... Бежит Пахом, рубаха и портки от пота к телу липнут, во рту пересохло. В груди как меха кузнечные раздуваются, а сердце молотком бьет.

„Бежит Пахом из последних сил, а солнце уж к краю подходит. Вот-вот закатываться станет.

„Солнце близко, да и до места уж вовсе не далеко. Видит шапку лисью на земле и старшину, как он на земле сидит.

„Взглянул Пахом на солнце, а оно до земли дошло, уже краешком заходить стало. Наддал из последних сил Пахом, надулся, взбежал за шихан. Видит — шапка. Подкосились ноги, и упал он наперед руками, до шапки достал.

„ — Ай, молодец! — закричал старшина: — много земли завладел.

„Подбежал работник, хотел поднять его, а у него изо рта кровь течет, и он мертвый лежит..."

Задача Льва Толстого (№ 62)

Отвлечемся от мрачной развязки этой истории и остановимся на ее геометрической стороне. Можно ли установить по данным, рассеянным в этом рассказе, сколько примерно десятин земли обошел Пахом? Задача — на первый взгляд как будто невыполнимая — решается, однако, довольно просто.

Решение

Внимательно перечитывая рассказ и извлекая из него все геометрические указания, не трудно убедиться, что полученных данных вполне достаточно для исчерпывающего ответа на поставленный вопрос. Можно даже начертить план обойденного Пахомом земельного участка.

Прежде всего из рассказа ясно, что Пахом бежал по сторонам четыреугольника. О первой стороне его читаем: „*Верст пять прошел... Пройду еще верст пяток; тогда влево загибать*“...

Значит, первая сторона четыреугольника имела в длину около 10 верст.

О второй стороне, составляющей прямой угол с первой, численных указаний в рассказе не сообщается.

Длина третьей стороны — очевидно, перпендикулярной ко второй — указана в рассказе прямо: „*По третьей стороне всего версты две прошел*“.

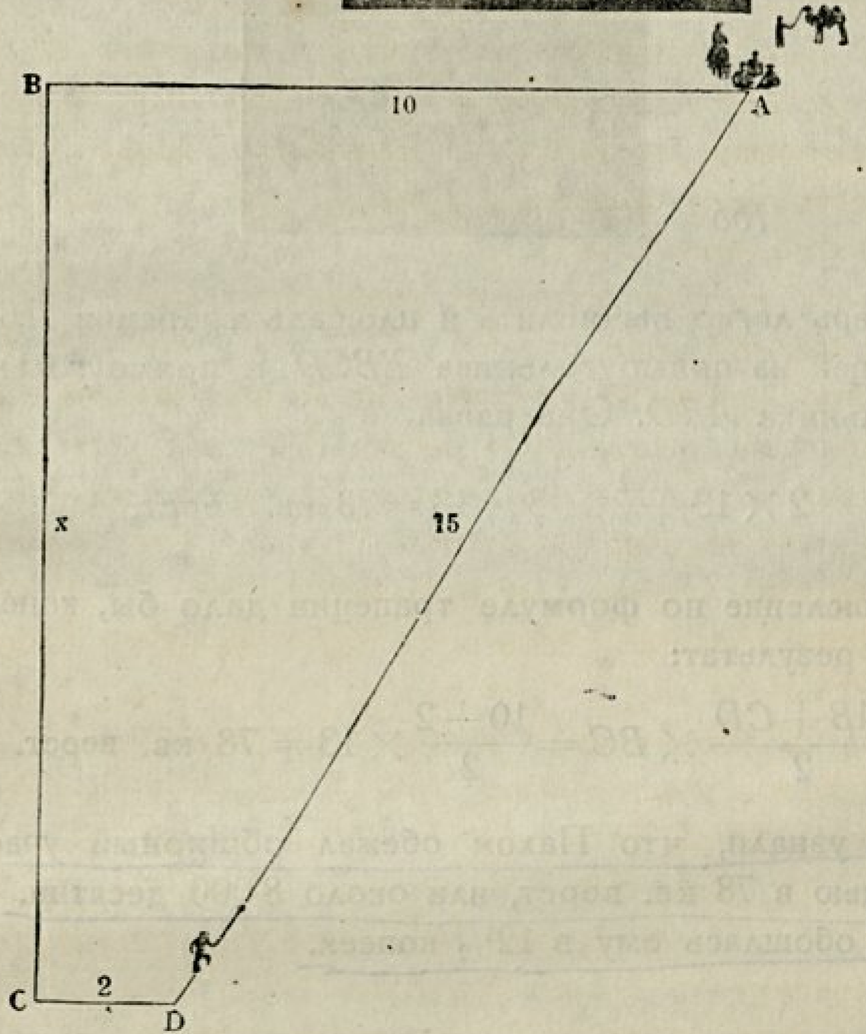
Непосредственно дана и длина четвертой стороны „*До места все те же верст 15*“.[1]

По этим данным мы и можем начертить план обойденного Пахомом участка (рис. 165). В полученном четыреугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$ верстам; $CD = 2$ в.; $AD = 15$ в.; углы B и C — прямые. Длину x неизвестной стороны BC не трудно вычислить, если провести из D перпендикуляр DE на AB (рис. 166). Тогда в прямоугольном треугольнике AED нам известны катет $AE = 8$ верст и гипотенуза $AD = 15$ верст. Неизвестный катет $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 13$ верст.

Итак, вторая сторона имела в длину около 13 верст.

---

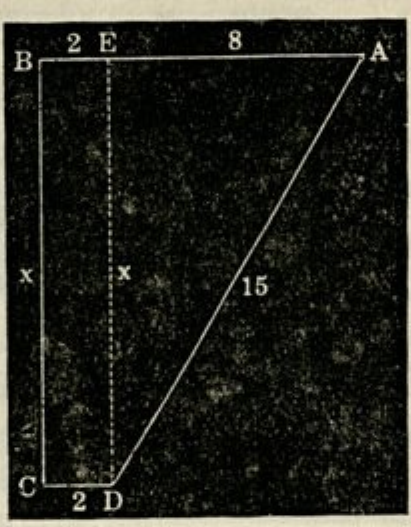
[1] Здесь непонятно, однако, как мог Пахом с такого расстояния различать людей на шихане.



165

Как видим, Пахом ошибся, считая вторую сторону короче первой.

Как видите, можно довольно точно начертить план того участка, который обежал Пахом. Несомненно Л. Н. Толстой имел перед глазами чертеж наподобие рис. 166, когда писал свой рассказ.



166

Теперь легко вычислить и площадь трапеции $ABCD$, состоящей из прямоугольника $EBCD$ и прямоугольного треугольника AED. Она равна.

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ кв. верст.}$$

Вычисление по формуле трапеции дало бы, конечно, тот же результат:

$$\frac{AB + CD}{2} \times BC = \frac{10 + 2}{2} \times 13 = 78 \text{ кв. верст.}$$

Мы узнали, что Пахом обежал обширный участок площадью в 78 кв. верст, или около 8000 десятин. Десятина обошлась ему в $12^1/_2$ копеек.

ТРАПЕЦИЯ ИЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

Задача № 63

В роковой для своей жизни день Пахом прошел $10 + 13 + 2 + 15 = 40$ верст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было итти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчета. Интересно определить: выгадал ли он, или прогадал от того, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае должен он был получить бо́льшую площадь земли?

Решение

Прямоугольников с обводом в 40 верст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь. Вот ряд примеров:

$14 \times 6 = 84$ кв. верст
$13 \times 7 = 91$ „ „
$12 \times 8 = 96$ „ „
$11 \times 9 = 99$ „ „

Мы видим, что у всех этих фигур, при одном и том же периметре в 40 верст, площадь больше, чем у нашей трапеции. Однако, возможны и такие прямоугольники с периметром в 40 верст, площадь которых меньше, чем у трапеции;

$18 \times 2 = 36$ кв. верст
$19 \times 1 = 19$ „ „
$19^1/_2 \times {}^1/_2 = 9^3/_4$ „ „

Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определенного ответа. Есть прямоугольники с большею площадью, чем трапеция, но есть и с меньшею, при одном и том же обводе. Зато можно дать вполне определенный ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь? Сравнивая наши прямоугольники, мы замечаем, что чем меньше разница в длине сторон, тем площадь прямоугольника больше. Естественно заключить, что когда этой разницы не будет вовсе, т. е. когда прямоуголь ик превратится в квадрат, площадь фигуры достигнет наибольшей величины. Она будет равна тогда $10 \times 10 =$ 100 кв. верст. Легко видеть, что этот квадрат действительно превосходит по площади любой прямоугольник одинакового с ним периметра. Пахому следовало итти по сторонам квадрата, чтобы получить участок наибольшей площади, — на 22 кв. версты больше, чем он успел охватить.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО КВАДРАТА

Замечательное свойство квадрата — заключать в своих границах наибольшую площадь по сравнению со всеми другими прямоугольниками того же периметра — многим неизвестно. Приведем поэтому строгое доказательство этого положения.

Обозначим периметр прямоугольной фигуры через P. Если взять квадрат с таким периметром, то каждая сторона его должна равняться $\frac{P}{4}$. Докажем, что, укорачивая одну его сторону на какую-нибудь величину b, при таком же удлинении смежной стороны, мы получим прямоугольник строго одинакового с ним периметра, но меньшей площади. Другими словами, докажем, что площадь $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ квадрата больше площади $\left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right)$ прямоугольника:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right).$$

Так как правая сторона этого неравенства равна $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$, то все выражение принимает вид

$$0 > -b^2, \text{ или } b^2 > 0.$$

Но последнее неравенство очевидно: квадрат всякого количества, положительного или отрицательного, больше 0. Следовательно, справедливо и первоначальное неравенство, которое привело нас к этому.

Итак, квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с таким же периметром.

Отсюда следует, между прочим, и то, что из всех прямоугольных фигур с одинаковыми площадями квадрат имеет наименьший периметр. В этом можно убедиться следующим рассуждением. Допустим, что это неверно и что существует такой прямоугольник A, который, при равной с квадратом B площади, имеет периметр меньший, чем у него. Тогда, начертив квадрат C того же периметра, как у прямоугольника A, мы получим квадрат, имеющий бо́льшую площадь, чем у A, и, следовательно, бо́льшую, чем у квадрата B. Что же у нас вышло? Что квадрат C имеет периметр меньший, чем квадрат B, а площадь большую, чем он. Это, очевидно, невозможно: раз сторона квадрата меньше, то и площадь должна быть меньше. Значит, нельзя было допустить существование прямоугольника A, который при одинаковой площади имеет периметр меньший, чем у квадрата. Другими словами, из всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Знакомство с этими свойствами квадрата помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы и получить прямоугольный участок наибольшей площади. Зная, что он может пройти в день без напряжения, скажем, 36 верст, он пошел бы по границе квадрата со стороною 9 верст и к вечеру был бы обладателем участка в 81 кв. верст,— на 3 кв. версты больше, чем он получил со смертельным напряжением сил. И, наоборот, если бы он наперед ограничился какою-нибудь определенною площадью прямоугольного участка, например, в 36 кв. верст, то мог бы достичь результата с наименьшей затратой сил, идя по границе квадрата, сторона которого — 6 верст.

УЧАСТКИ ДРУГОЙ ФОРМЫ

Но, может быть, Пахому еще выгоднее было бы выкроить себе участок вовсе не прямоугольной формы, а какой-нибудь другой — четыреугольной, треугольной, пятиугольной и т. д.?

Этот вопрос может быть рассмотрен строго математически; однако из опасения утомить нашего добровольного читателя, мы не станем входить здесь в это рассмотрение и познакомим его только с результатами.

Можно доказать, во-первых, что из всех *четыреугольников* с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому, желая иметь четыреугольный участок, Пахом никакими ухищрениями не мог бы овладеть более, чем 100 кв. верстами (считая, что максимальный дневной пробег его — 40 верст).

Во-вторых, можно доказать, что квадрат имеет большую площадь, чем всякий треугольник равного периметра. Равносторонний треугольник такого же периметра имеет сторону $\frac{40}{3} = 13^1/_3$ версты, а площадь (по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где S площадь, а a — сторона):

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ кв. верст},$$

т. е. меньше даже, чем у той трапеции, которую Пахом обошел. Дальше (рис. 170, стр. 280) будет доказано, что из всех треугольников с равными периметрами *равносторонний* обладает наибольшею площадью. Значит, если даже этот наибольший треугольник имеет площадь, меньшую площади квадрата, то все прочие треугольники того же периметра по площади меньше, чем квадрат.

Но если будем сравнивать площадь квадрата с площадью пятиугольника, шестиугольника и т. д. равного периметра, то здесь первенство его прекращается: **правильный** пятиугольник обладает большею площадью, правильный шестиугольник — еще большею, и т. д. Легко убедиться в этом на примере правильного шестиугольника. При периметре в 40 верст его сторона $\frac{40}{6}$, площадь $\left(\text{по формуле } S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right)$ равна

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3} = 115 \text{ кв. верст.}$$

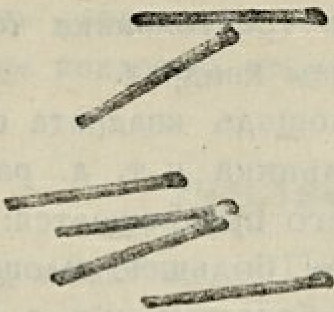
Избери Пахом для своего участка формулу правильного шестиугольника, он, при том же напряжении сил, овладел бы площадью на 115 — 78, т. е. на 37 кв. верст больше, чем в действительности, и на 15 кв. верст больше, чем дал бы ему квадратный участок (но для этого, конечно, пришлось бы ему пуститься в путь с угломерными иструментами).

Задача № 64

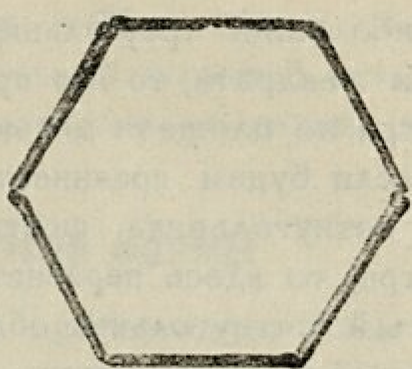
Из шести спичек сложить фигуру с наибольшей площадью.

Решение

Из шести спичек можно составить довольно разнообразные фигуры: равносторонний треугольник, прямоугольник, множество параллелограммов, целый ряд неправильных пятиугольников, ряд неправильных шести-



167



168

угольников и, наконец, правильный шестиугольник. Геометр, не сравнивая между собою площадей этих фигур, заранее знает, какая фигура имеет наибольшую площадь: правильный шестиугольник (рис. 168).

ФИГУРЫ С НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

Можно доказать строго геометрически, что чем больше сторон у правильного многоугольного участка, тем большую площадь заключает он в одних и тех же границах. А самую большую площадь при данном периметре охватывает окружность. Если бы Пахом бежал по кругу, то, пройдя те же 40 верст, он получил бы площадь в

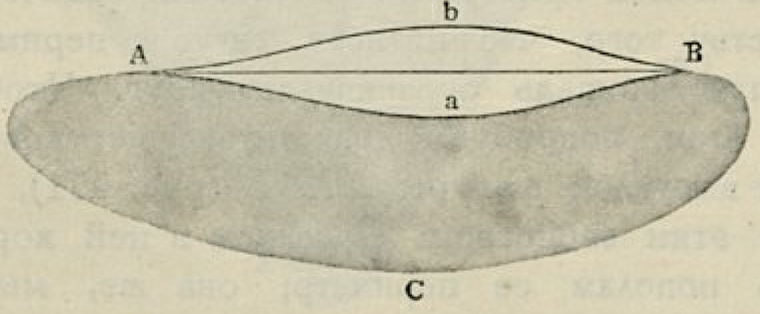
$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ кв. верст}$$

Большею площадью, при данном периметре, не может обладать никакая другая фигура, безразлично — прямолинейная или криволинейная.

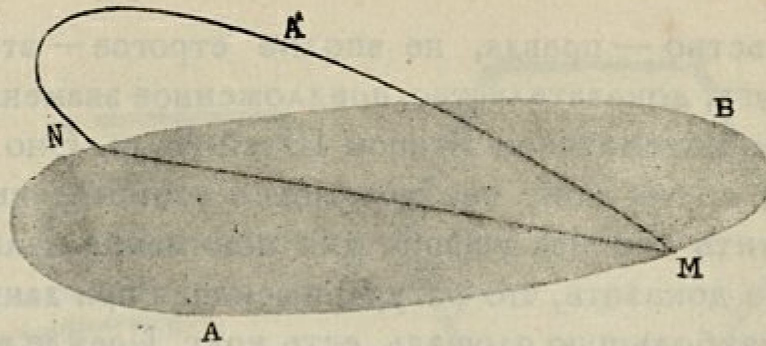
Мы позволим себе несколько остановиться на этом удивительном свойстве круга заключать в своих границах большую площадь, чем всякая другая фигура любой формы, имеющая тот же периметр. Может быть, некоторые читатели полюбопытствуют узнать, каким способом доказываются подобные положения. Приводим далее доказательство — правда, не вполне строгое — этого свойства круга, доказательство, предложенное знаменитым германским математиком Яковом Штейнером. Оно довольно длинно, но те, кому оно покажется утомительным, могут пропустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

Чадо доказать, что фигура, имеющая при данном периметре наибольшую площадь, есть круг. Прежде всего установим, что искомая фигура должна быть выпуклой. Это значит, что всякая ее хорда должна полностью располагаться внутри фигуры. Пусть у нас имеется фигура *AaBC* (рис. 169), имеющая внешнюю хорду *AB*. Заменим дугу *a* дугою *b*, симметричною с нею. От такой замены периметр фигуры *ABC* не изменится, площадь же явно увеличится. Значит, фигуры вроде *AaBC* не могут быть теми, которые при одинаковом периметре заключают наибольшую площадь.

Итак, искомая фигура есть фигура в ы п у к л а я. Далее, мы можем наперед установить еще и другое свойство этой фигуры: всякая хорда, которая делит пополам ее периметр, рассекает пополам и ее площадь. Пусть фигура *AMBN* (рис. 170) есть искомая, и пусть хорда *MN* делит ее периметр пополам. Докажем, что площадь *AMN* равна площади *MBN*. В самом деле, если бы какая-либо из этих частей была по площади больше другой, — например $AMN > MNB$, то, перегнув фигуру *AMN* по *MN*, мы получили бы фигуру *AMA'N*, площадь которой больше,



169



170

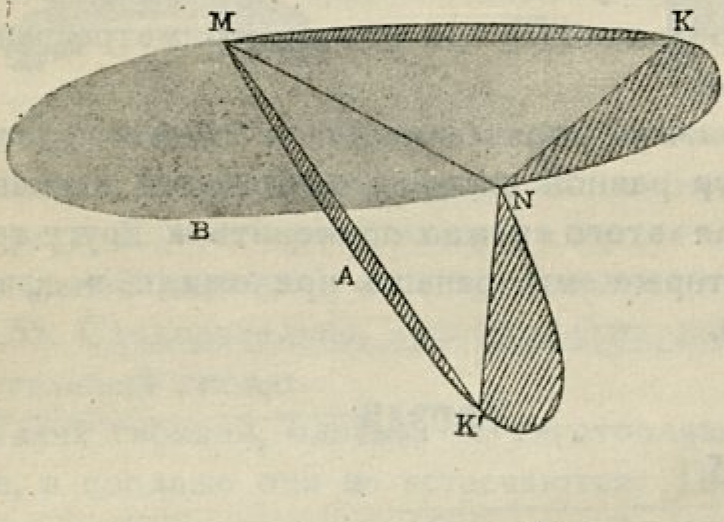
чем у первоначальной фигуры $AMBN$, периметр же одинаков с нею. Значит, фигура $AMBN$, в которой хорда, рассекающая периметр пополам, делит площадь на неравные части, не может быть искомая (т. е. не может иметь наибольшую площадь при данном периметре).

Прежде чем итти далее, докажем еще следующую вспомогательную теорему: из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого стороны эти заключают прямой угол. Чтобы доказать это, вспомним тригонометрическое выражение площади S треугольника со сторонами a и b и углом C между ними:

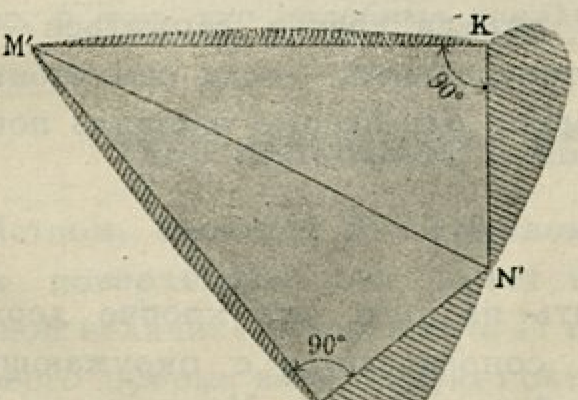
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Выражение это будет, очевидно, наибольшим (при данных сторонах) тогда, когда $\sin C$ примет наибольшее значение, т. е. будет равен единице. Но угол, синус которого равен 1, есть прямой, — что и требовалось доказать.

Теперь можем приступить к основной задаче — к доказательству того, что из всех фигур с периметром p наибольшую площадь ограничивает круг. Чтобы убедиться в этом, попробуем допустить существование некруговой выпуклой фигуры $MKNB$ (рис. 171), которая обладает этим свойством. Проведем в ней хорду MN, делящую пополам ее периметр; она же, мы знаем разделит пополам и площадь фигуры. Перегнем половину MKN по линии MN так, чтобы она расположилась симметрично ($MK'N$). Заметим, что фигура $MNK'A$ обладает тем же периметром и тою же площадью, что и первоначальная фигура $MKNB$. Так как дуга MKN не есть полуокружность (иначе нечего было бы и доказывать), то на ней должны находиться такие точки, из которых отрезок MN виден не под прямым углом. Пусть K такая точка, а K'—ей симметричная, т. е. углы K и K'—не прямые. Раздвигая (или сдвигая) стороны MK, KN, MK', NK', мы можем сделать заключенный между ними угол прямым и получим тогда равные прямоугольные



171



172

треугольники. Эти треугольники сложим гипотенузами, как на рис. 172, и присоединим к ним в соответствующих местах заштрихованные сегменты. Получим фигуру $M'K'N'K$, обладающую тем же периметром, что и первоначальная, но, очевидно, большею площадью (потому что прямоугольные треугольники $M'KN'$ и $M'K'N'$ имеют бо́льшую площадь, чем непрямоугольные MKN и $MK'N$). Значит, никакая некруговая фигура не может обладать, при данном периметре, наибольшею площадью. И только в случае круга мы указанным способом не могли бы построить фигуры, имеющей при том же периметре еще бо́льшую площадь.

Вот каким рассуждением можно доказать, что круг есть фигура, обладающая при данном периметре наибольшею площадью

Легко доказать справедливость и такого положения: из всех фигур равной площади круг имеет наименьший периметр. Для этого нужно применить к кругу те рассуждения, которые мы раньше приложили к квадрату (см. стр. 275).

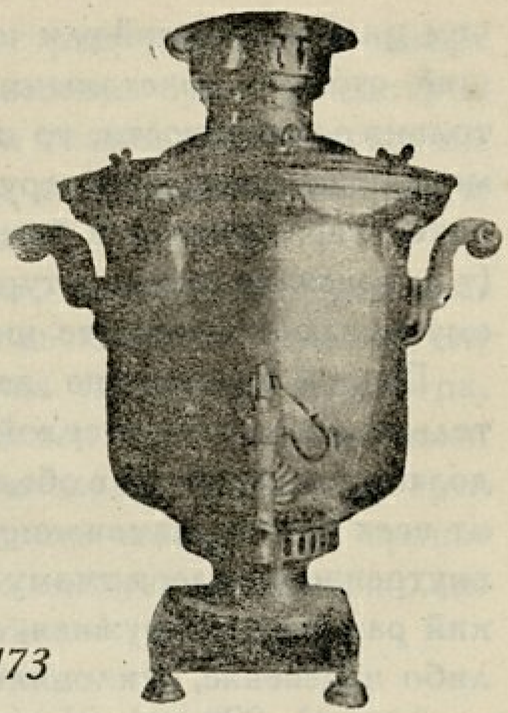
ГВОЗДИ

Задача № 65

Какой гвоздь должен крепче держаться — круглый, квадратный или треугольный, — если они забиты одинаково глубоко и имеют одинаковую площадь поперечного сечения?

Решение

Будем исходить из того, что крепче держится тот гвоздь, который соприкасается с окружающим материалом по бо́льшей поверхности. У какого же из наших гвоздей большая боковая поверхность? Мы уже знаем,



173

что при равных площадях периметр квадрата меньше периметра треугольника, а окружность меньше периметра квадрата. Если сторону квадрата принять за единицу, то вычисление дает для этих трех величин значения: 4,53; 4; 3,55. Следовательно, крепче других должен держаться треугольный гвоздь.

Таких гвоздей, однако, не изготовляют,—по крайней мере, в продаже они не встречаются. Причина кроется, вероятно, в том, что подобные гвозди легче изгибаются и ломаются.

ТЕЛО НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Свойством, сходным со свойством круга, обладает и шаровая поверхность: она имеет наибольший объем при данной величине поверхности. И наоборот, из всех тел одинакового объема наименьшую поверхность имеет шар. Эти свойства не лишены значения в практической жизни. Шарообразный самовар обладает меньшей поверхностью, чем цилиндрический или какой-либо иной формы, вмещающий столько же стаканов; а так как тело теряет теплоту только с поверхности, то шарообразный самовар остывает медленнее, чем всякий другой того же объема. Напротив, резервуар градусника быстрее нагревается и охлаждается (т. е. принимает температуру окружающих предметов), когда ему придают форму не шарика, а цилиндра.

По той же причине земной шар, — если он действительно состоит из твердой оболочки и жидкого ядра, [1] — должен уменьшаться в объеме, т. е. сжиматься, уплотняться, от всех причин, изменяющих форму его поверхности: его внутреннему содержимому должно становиться тесно всякий раз, когда наружная его форма претерпевает какое-либо изменение, отклоняясь от шара. Возможно, что этот геометрический факт находится в связи с землетрясениями и вообще с тектоническими явлениями; но об этом должны иметь суждение геологи.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Задачи вроде тех, которыми мы сейчас занимались, рассматривают вопрос со стороны как бы экономической: при данной затрате сил (например, при прохождении 40-верстного пути) как достигнуть наивыгоднейшего результата (охватить наибольший участок)? Отсюда и заглавие настоящего отдела этой книги: „Геометрическая экономия“. Но это — вольность популяризатора; в математике вопросы подобного рода носят другое название: задачи „на максимум и минимум“. Они могут быть весьма разнообразны по сюжетам и по степени трудности. Многие разрешаются лишь приемами высшей математики; но не мало

---

[1] Вопрос еще спорный в науке.

есть и таких, для решения которых достаточно самых элементарных сведений. В дальнейшем будет рассмотрен ряд подобных задач из области геометрии, которые мы будем решать, пользуясь одним любопытным свойством произведения равных множителей.

Для случая двух множителей свойство это уже знакомо нам. Мы знаем, что площадь квадрата больше, чем площадь всякого прямоугольника такого же периметра. Если перевести это геометрическое положение на язык арифметики, оно будет означать следующее: когда требуется разбить число на две такие части, чтобы произведение их было наибольшим, то следует делить пополам. Например, из всех произведений

$$13 \times 17,\ 16 \times 14,\ 12 \times 18,\ 11 \times 19,\ 10 \times 20,\ 15 \times 15$$

и т. д., сумма множителей которых равна 30, наибольшим будет 15×15 — даже если сравнивать и произведения дробных чисел ($14^1/_2 \times 15^1/_2$ и т. п.).

То же справедливо и для произведений трех множителей, имеющих постоянную сумму: произведение их достигает наибольшей величины, когда множители равны между собою. Это прямо вытекает из предыдущего. Пусть три множителя x, y, z в сумме равны a

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что x и y не равны между собою. Если заменим каждый из них полусуммою $\frac{x+y}{2}$, то сумма множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но так как, согласно предыдущему,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)>xy,$$

то произведение трех множителей

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z$$

больше произведения xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z>xyz.$$

Вообще, если среди множителей xyz есть хотя бы два неравных, то можно всегда подобрать числа, которые, не изменяя общей суммы, дадут большее произведение, чем xyz. И только когда все три множителя равны, произвести такой замены нельзя. Следовательно, при $x+y+z=a$ произведение xyz будет наибольшим тогда, когда

$$x=y=z.$$

Воспользуемся знанием этого свойства равных множителей, чтобы решить несколько интересных задач.

ТРЕУГОЛЬНИК С НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

Задача № 66

Какую форму нужно придать треугольнику, чтобы при данной сумме его сторон он имел наибольшую площадь?

Мы уже заметили раньше (стр. 276), что этим свойством обладает треугольник равносторонний. Но как это доказать?

Решение

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c и периметром $a+b+c=2p$ выражается, как известно из курса геометрии, так:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда:

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c).$$

Площадь S треугольника будет наибольшей тогда же, когда станет наибольшей величиной и ее квадрат S^2, или выражение $\frac{S^2}{p}$, где p, полупериметр, есть, согласно условию, величина неизменная. Но так как обе части равенства получают наибольшее значение одновременно, то вопрос сводится к тому, при каком условии произведение

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

становится наибольшим. Заметив, что сумма этих трех множителей есть величина постоянная,

$$p-a+p-b+p-c=3p-(a+b+c)=3p-2p=p,$$

мы заключаем, что произведение их достигнет наибольшей величины тогда, когда множители станут равны, т. е. когда осуществится равенство

$$p-a=p-b=p-c,$$

откуда

$$a=b=c.$$

Итак, треугольник имеет, при данном периметре, наибольшую площадь тогда, когда стороны его равны между собою.

САМЫЙ ТЯЖЕЛЫЙ БРУС

Задача № 67

Из цилиндрического бревна нужно выпилить брус наибольшего веса. Как это сделать?

Решение

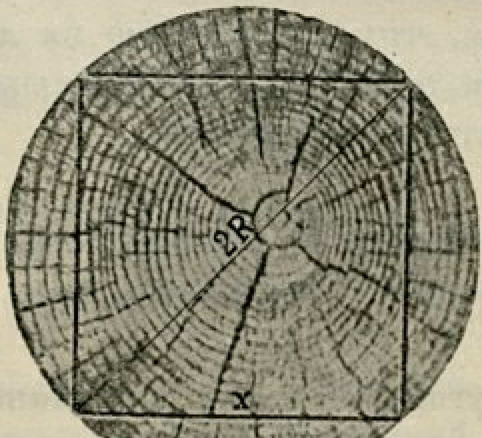
Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы вписать в круг прямоугольник с наибольшей площадью. Хотя после всего сказанного читатель уже подготовлен к мысли, что таким прямоугольником будет квадрат, все же интересно строго доказать это положение.

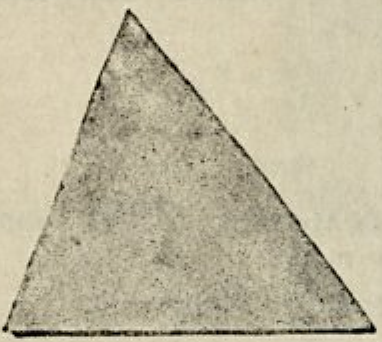
Обозначим одну сторону искомого прямоугольника (рис. 174) через x; тогда другая выразится через $\sqrt{4R^2-x^2}$, где R — радиус кругового сечения бревна. Площадь прямоугольника $S=x\sqrt{4R^2-x^2}$, откуда

$$S^2=x^2(4R^2-x^2).$$

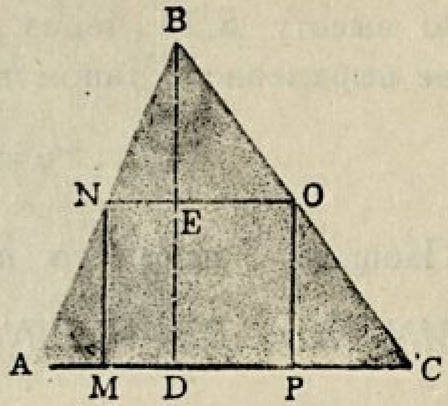
Так как сумма множителей x^2 и $4R^2-x^2$ есть величина постоянная ($x^2+4R^2-x^2=4R^2$), то произведение их S^2 будет наибольшим при $x^2=4R^2-x^2$, т. е. при $x=R\sqrt{2}$.

174





175



176

Тогда же достигнет наибольшей величины и S, т. е. площадь искомого прямоугольника.

Итак, одна сторона прямоугольника с наибольшей площадью $= R\sqrt{2}$, т. е. стороне вписанного квадрата. Брус имеет наибольший объем, если сечение его есть квадрат, вписанный в сечение цилиндрического бревна.

ИЗ КАРТОННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача № 68

Имеется кусок картона треугольной формы (рис. 175). Нужно вырезать из него параллельно данному основанию и высоте прямоугольник наибольшей площади.

Решение

Пусть ABC есть данный треугольник (рис. 176), а $MNOP$ — тот прямоугольник, который должен остаться после обрезки. Из подобия треугольников ABC и NBO имеем

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NO}, \text{ откуда } NO = \frac{BE \cdot AC}{BD}.$$

Обозначив одну сторону NO искомого прямоугольника через y, ее расстояние BE от вершины треугольника через x, основание AC данного треугольника через a, а его высоту BD — через h, переписываем полученное ранее выражение в таком виде:

$$y = \frac{ax}{h}.$$

Площадь S искомого прямоугольника $MNOP$ равна

$$MN \cdot NO = (BD - BE)NO = (h - x)\ y = (h - x)\frac{ax}{h}.$$

Следовательно,

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)x.$$

Площадь S будет наибольшей тогда же, когда и произведение $\frac{Sh}{a}$, а, следовательно, тогда, когда достигнет наибольшей величины произведение множителей $(h - x)$ и x. Но сумма $h - x + x = h =$ постоянной величине. Значит, произведение их максимальное, когда

$$h - x = x,$$

т. е.

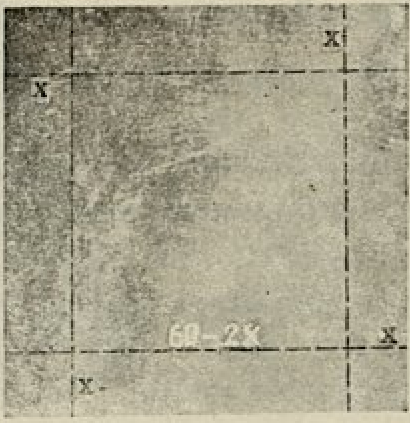
$$x = \frac{h}{2}.$$

Мы узнали, что сторона NO искомого прямоугольника проходит через середину высоты треугольника и, следовательно, соединяет середины его сторон. Значит, эта сторона прямоугольника $= \frac{a}{2}$, а другая $= \frac{h}{2}$.

ЗАТРУДНЕНИЕ ЖЕСТЯНИКА

Задача № 69

Жестянику заказали изготовить из квадратного куска жести в 60 *см* ширины четыреугольную коробку без крышки и поставили условием, чтобы коробка имела наи-



177

большую вместимость. Жестяник долго примерял, какой ширины нужно для этого отогнуть края, но не мог прийти к определенному решению. Не удастся ли читателю выручить его из затруднения?

Решение

Пусть ширина отгибаемых полос x (рис. 177). Тогда ширина квадратного дна коробки будет равна $60-2x$; объем же v коробки выразится произведением

$$v=(60-2x)(60-2x)x$$

При каком x это произведение имеет наибольшее значение? Если бы сумма трех множителей была постоянна, произведение было бы наибольшим в случае их равенства. Но здесь сумма множителей

$$60-2x+60-2x+x=120-3x$$

не есть постоянная величина, так как изменяется с изменением x. Однако не трудно добиться того, чтобы сумма трех множителей была постоянной: для этого достаточно лишь умножить обе части равенства на 4. Получим

$$4v=(60-2x)(60-2x)4x.$$

Сумма этих множителей равна

$$60-2x+60-2x+4x=120,$$

величине постоянной. Значит, произведение этих множителей достигает наибольшей величины при их равенстве, т. е. когда

$$60-2x=4x,$$

откуда

$$x=10.$$

Тогда же $4v$, а с ними и v достигнут своего максимума.

Итак, коробка получится наибольшего объема, если у жестяного листа отогнуть 10 *см.*[1] Этот наибольший объем равен $40\times40\times10=16\,000$ *куб. см.* Отогнув на сантиметр меньше или больше, мы в обоих случаях уменьшим объем коробки. Действительно:

$$9\times42\times42=15\,900 \text{ куб см},$$
$$11\times38\times38=15\,900 \text{ куб. см.}$$

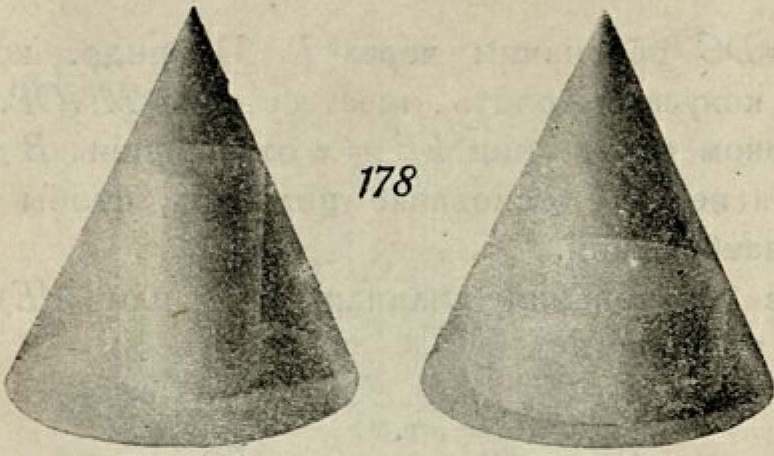
— в том и другом случаях меньше 16 000 *куб. см.*

ЗАТРУДНЕНИЕ ТОКАРЯ

Задача № 70

Токарю дан конус и поручено выточить из него цилиндр так, чтобы сточено было возможно меньше мате-

[1] Решая задачу в общем виде, найдем, что при ширине a квадратного листа нужно для получения коробки наибольшего объема отогнуть полоски шириною $x=\frac{1}{6}a$, потому что произведение $(a-2x)(a-2x)x$, или $(a-2x)(a-2x)4x$ — наибольшее при $a-2x=4x$.

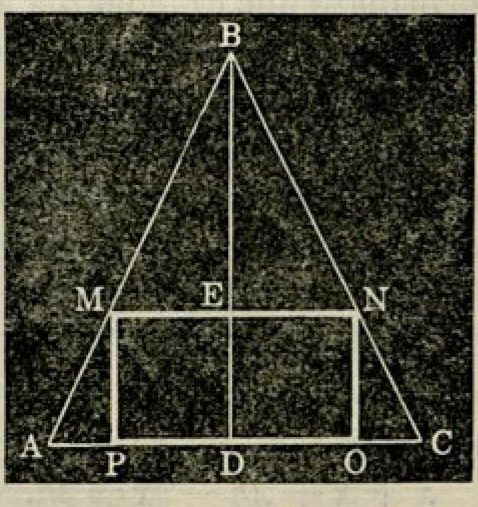


178

риала. Токарь стал размышлять о форме искомого цилиндра: сделать ли его высоким, хотя и узким (рис 178, слева), или, наоборот, широким, зато низким (рис. 178, справа). Он никак не мог решить, при какой форме цилиндр получится наибольшего объема, т. е. будет сточено меньше материала. Как он должен поступить?

Решение

Задача требует внимательного геометрического рассмотрения. Пусть ABC (рис. 179) — сечение конуса, BD — его высота, которую обозначим через h; радиус основа-



179

ния $AD = DC$ обозначим через R. Цилиндр, который можно из конуса выточить, имеет сечение $MNOP$. Найдем, на каком расстоянии $BE = x$ от вершины B должно находиться верхнее основание цилиндра, чтобы объем его был наибольший.

Радиус r основания цилиндра (PD или ME) легко найти из пропорции

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \text{ т. е. } \frac{r}{R} = \frac{x}{h},$$

откуда

$$r = \frac{Rx}{h}.$$

Высота ED цилиндра $= h - x$. Следовательно, объем его

$$v = \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h} (h - x),$$

откуда

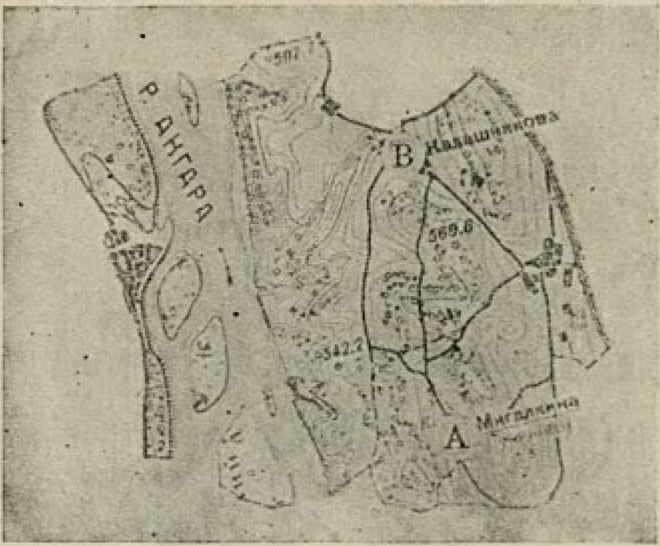
$$\frac{vh}{\pi R^2} = x^2 (h - x).$$

В выражении $\frac{vh}{\pi R^2}$ величины h, π и R постоянные, и только v переменная. Мы желаем разыскать такое x, при котором v делается наибольшим. Но, очевидно, v станет наибольшим одновременно с $\frac{vh}{\pi R^2}$, т. е. с $x^2 (h - x)$. Когда же это последнее выражение становится наибольшим? Мы имеем здесь три переменных множителя x, x и $(h - x)$. Если бы их сумма была постоянной, произведение было бы наибольшим тогда, когда множители было бы равны. Этого постоянства суммы легко добиться, если обе части последнего равенства умножить на 2. Тогда получим:

$$\frac{2vh}{\pi R^2} = x^2 (2h - 2x).$$

Теперь три множителя правой части имеют постоянную сумму

$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$



180

Следовательно, произведение их будет наибольшим, когда все множители равны, т. е.

$$x = 2h - 2x, \text{ и } x = \frac{2h}{3}.$$

Тогда же станет наибольшим и выражение $\frac{2vh}{\pi R^2}$, а с ним вместе и объем v цилиндра.

Теперь мы знаем, как должен быть выточен искомый цилиндр: его верхнее основание должно отстоять от вершины на $^2/_3$ его высоты.

КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

В заключение рассмотрим задачу на „максимум и минимум“, разрешаемую крайне простым геометрическим построением.

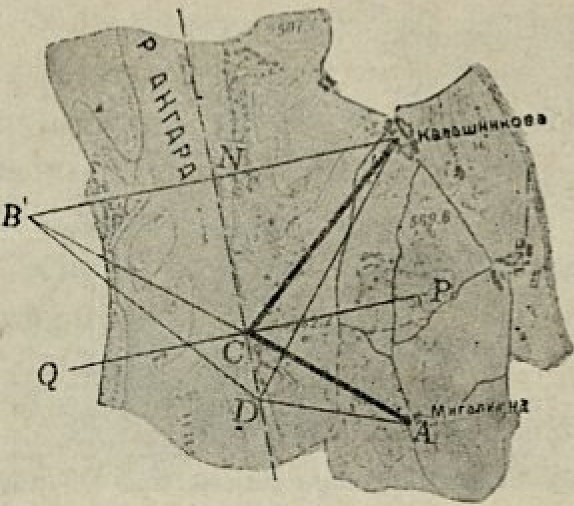
Задача № 71

У берега реки надо построить водонапорную башню, из которой вода доставлялась бы по трубам в селения A и B (рис. 180).

В какой точке нужно ее соорудить, чтобы общая длина труб от башни до обоих селений была наименьшей?

Решение

Задача сводится к отысканию кратчайшего пути от A к берегу и затем к B.



181

Допустим, что искомый путь есть ACB (рис. 181). Перегнем чертеж по CN. Получим точку B'. Если ACB есть кратчайший путь, то, так как $CB' = CB$, путь ACB' должен быть короче всякого иного (напр. ADB'). Это будет лишь в том случае, когда точка C лежит на прямой AB': тогда всякий иной путь от A до B', как ломаный, будет длиннее. Значит, для нахождения кратчайшего пути нужно найти лишь точку C пересечения прямой AB' с линией берега. Тогда, соединив C и B, найдем обе части кратчайшего пути от A до B.

Проведя в точке C перпендикуляр к CN, легко видеть, что углы ACP и BCP, составляемые обеими частями кратчайшего пути с этим перпендикуляром, равны между собою (уг. $ACP =$ уг. $B'CQ =$ уг. BCP).

Таков, как известно, закон следования светового луча, когда он отражается от зеркала: угол падения равен углу отражения. Отсюда следует, что световой луч при отражении избирает к р а т ч а й ш и й путь, — вывод, который был известен еще древнему физику и геометру Герону Александрийскому две тысячи лет назад.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕЖДУ ДЕЛОМ И ШУТКОЙ В ГЕОМЕТРИИ